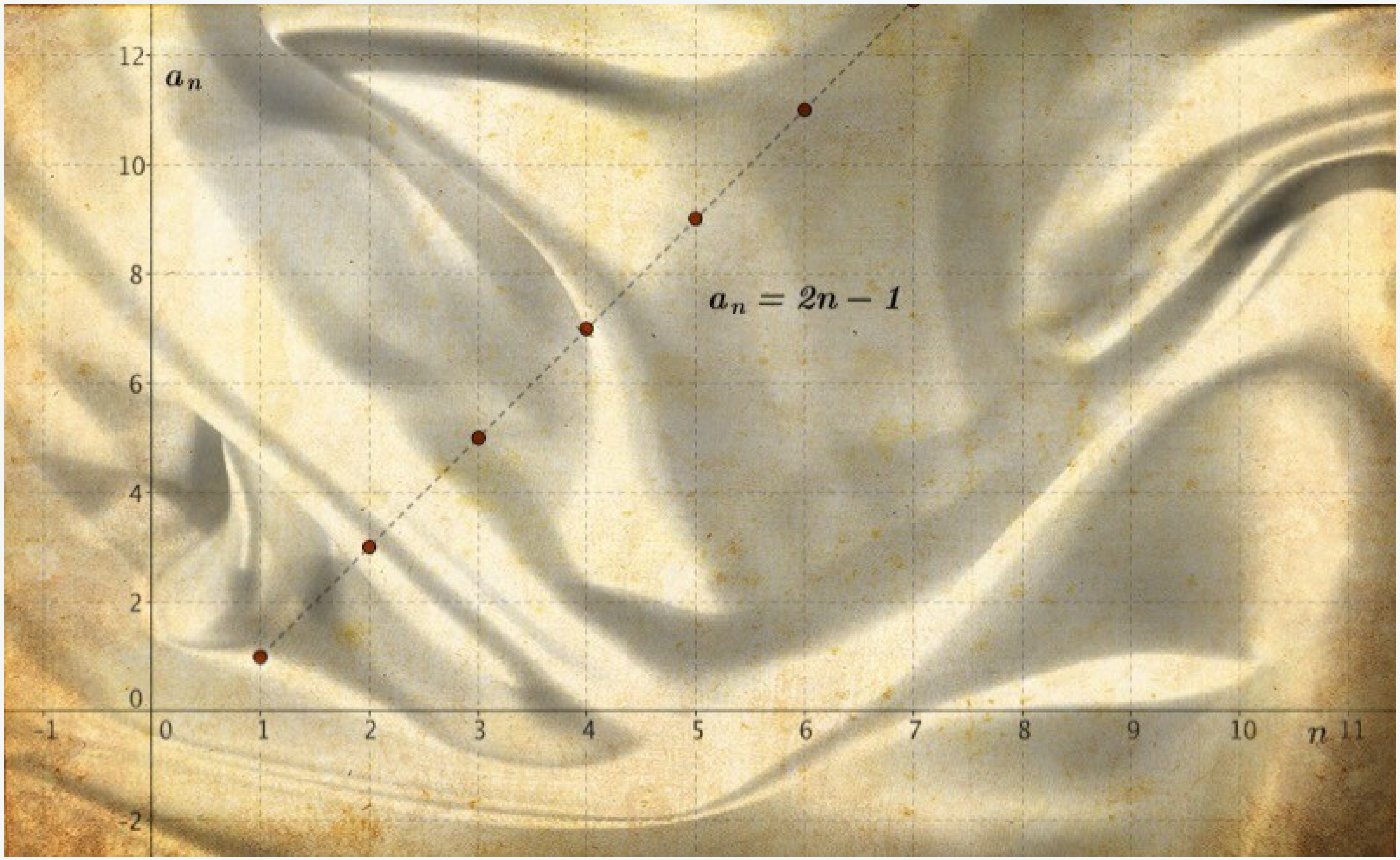


Arithmetische Folgen

Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

Definition 1:

Eine Folge heißt arithmetische Folge, wenn es eine Konstante d gibt, so dass für alle Folgenglieder gilt:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} - a_n = d$$

Definition 2:

Eine Folge ist genau dann eine arithmetische Folge, wenn sie eine Bildungsvorschrift der Form

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

besitzt, wobei a_1 das Anfangsglied und d die konstante Differenz der Folge ist. Tatsächlich ist

$$a_2 = a_1 + d, \qquad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d, \qquad a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

Beispiel 1:

$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \ldots \qquad (a_{n+1} - a_n = 5)$

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots \qquad (a_{n+1} - a_n = 1)$

Definition:

Bei einer arithmetischen Folge stellt das mittlere von drei aufeinanderfolgenden Gliedern

$$a_{n-1}, \quad a_n, \quad a_{n+1}$$

das arithmetische Mittel der beiden äußeren Glieder dar:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Das kann man zeigen, für jedes $n \geq 2$ der arithmetischen Folge gilt:

$$a_{n+1} = a_n + d\,, \qquad a_{n-1} = a_n - d \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass die Folge $\langle a_n \rangle = \langle 2n - 7 \rangle$ eine arithmetische Folge ist.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die ersten 5 Glieder der arithmetischen Folge, wenn bekannt ist, dass das 6. Glied gleich -1 und das 7. Glied gleich 1 ist.

Lösung 1:

Wir zeigen, dass die Folge $\langle a_n \rangle = \langle 2n - 7 \rangle$ eine arithmetische Folge ist.

$$a_n = 2n - 7$$

$$a_{n-1} = 2(n-1) - 7 = 2n - 9, \qquad a_{n+1} = 2(n+1) - 7 = 2n - 5$$

$$a_{n+1} + a_{n-1} = 4n - 14 = 2(2n-7) = 2a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Lösung 2:

$$a_6 = -1, \quad a_7 = 1, \qquad d = a_7 - a_6 = 1 - (-1) = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \qquad a_7 = a_1 + (7-1) \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_7 - (7-1) \cdot 2$$

$$a_1 = 1 - (7-1) \cdot 2 = -11, \qquad a_2 = a_1 + d = -11 + 2 = -9$$

$$a_n = a_1 + 2(n-1) = -11 + + 2(n-1): \quad -11, -9, -7, -5, -3, \ldots$$

Graphische Darstellung einer arithmetischen Folge

Eine arithmetische Folge sei durch folgende Bildungsvorschrift bestimmt:

$$a_n = 2n - 1$$

$$\langle a_n \rangle = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ 2n - 1, \qquad d = 2$$

d.h., alle Glieder dieser Folge liegen auf der Geraden $y = 2x - 1$:

$$x = n, \qquad y = a_n$$

deren x-Werte die Menge der natürlichen Zahlen sind.

Die Umkehrbehauptung gielt:

Werte einer beliebigen Funktion $y = ax + b$, deren x-Werte die Menge der natürlichen Zahlen ist, d.h.

$$a + b, \quad 2a + b, \quad 3a + b, \ \ldots, \ na + b, \ \ldots$$

bilden eine arithmetische Folge, deren Anfansglied $a + b$ und die konstante Differenz $d = a$ ist.

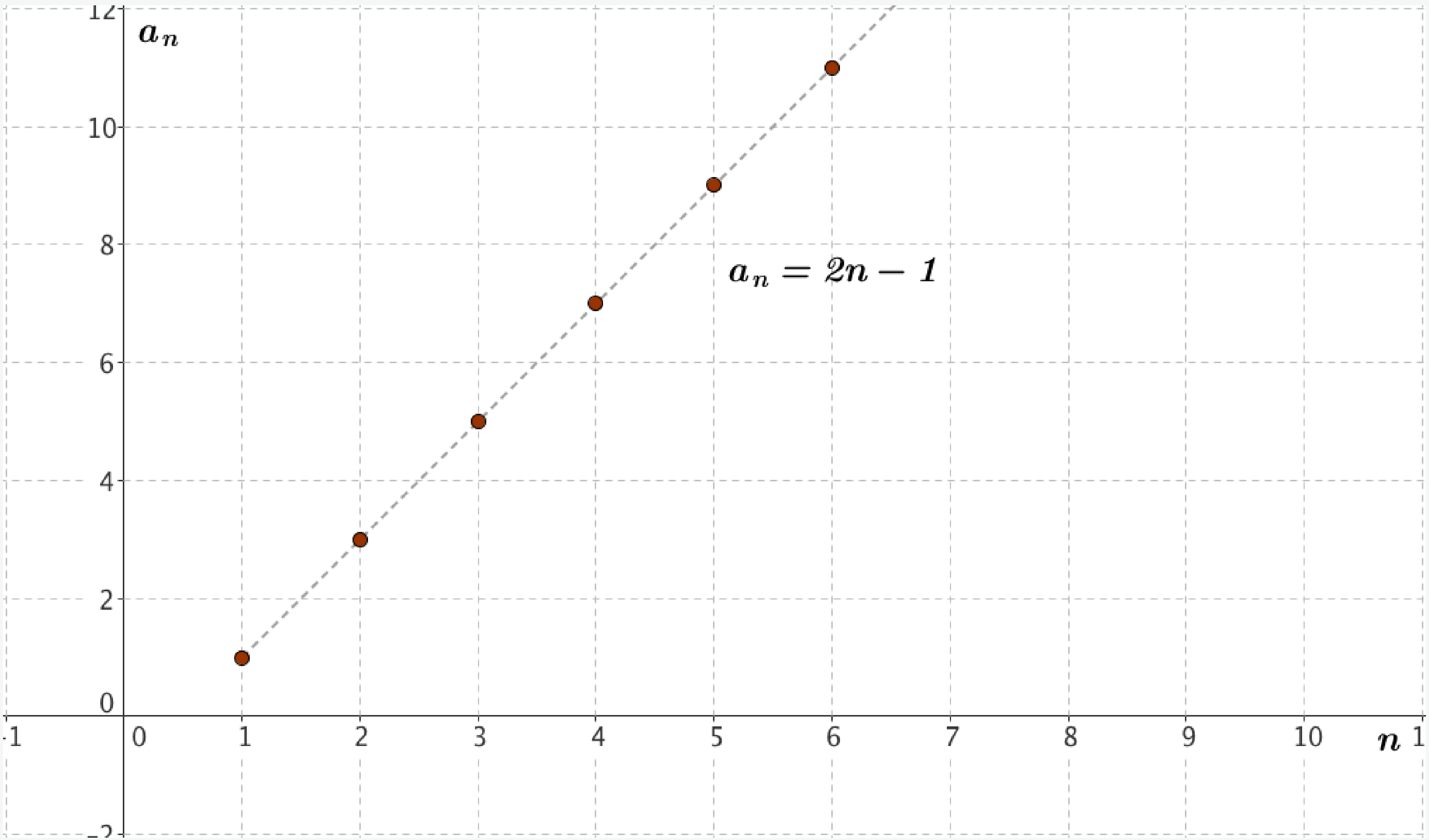


Abb. 1: Die Funktion y =2x – 1 für x ≥ 1 (gestrichelt dargestellt) mit den Punkten, die ersten Gliedern der Folge 2n - 1 entsprechen

Es gibt viele Anwendungen, die, ausgehend von einer Folge, die Aufsummierung der Folgenglieder bis zu einem Index n erfordern. Das führt auf die Begriffe “Teilsumme” oder “Partialsumme”. Wir können aus den Gliedern einer Folge a_n verschiedene Summen bilden

$$\langle a_n \rangle = a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ldots, a_{n-1}, \ a_n, \ldots$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i \ , \quad \ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \ , \quad \ldots$$

Beispiel 2:

Wir haben eine arithmetische Folge:

$$a_{n+1} = a_n + d\,, \qquad a_1 = 2\,, \qquad d = 5$$

$$\langle a_n \rangle = 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37,\ \dots$$

Die achte Partialsumme lautet

$$S_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_7 + a_8 = 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27 + 32 + 37$$

Man kann sehen, dass

$$a_1 + a_8 = 2 + 37 = 39\,, \qquad a_2 + a_7 = 7 + 32 = 39$$

$$a_3 + a_6 = 12 + 27 = 39\,, \qquad a_4 + a_5 = 17 + 22 = 39$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5 = 39$$

$$\Rightarrow \quad S_8 = 4\,(a_1 + a_8) = (a_1 + a_8)\,\frac{8}{2}$$

Bestimmen wir jetzt die allgemeine Formel für das die *n*-te Partialsumme

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

oder in der umgekehrten Ordnung

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

und addieren die beiden Gleichungen

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$

$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d \qquad \Rightarrow \qquad S_n = \frac{2\,a_1 + (n - 1)\, d}{2} \cdot n$$

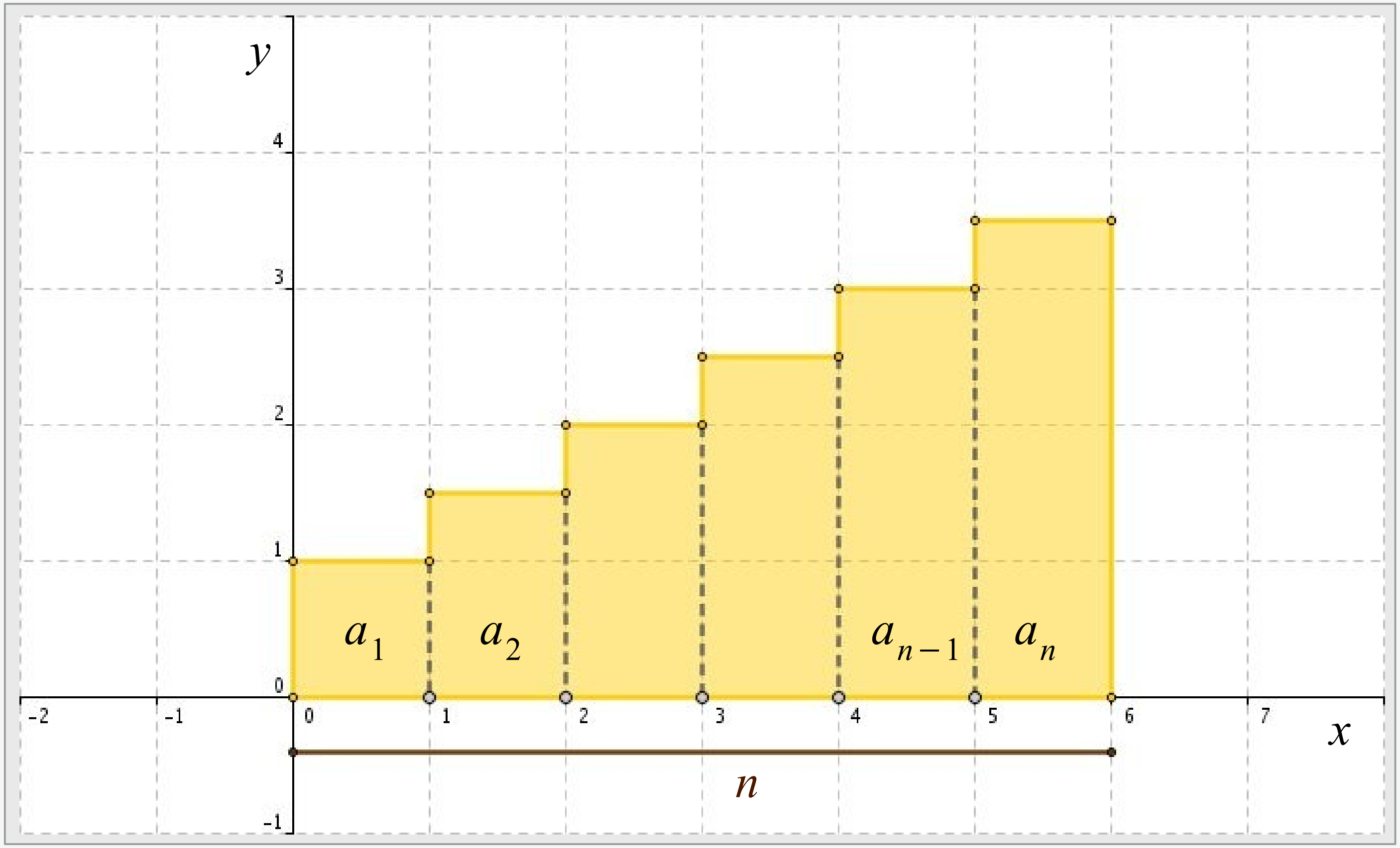


Abb. 2-1: Graphische Illustration einer Partialsumme

Die Länge eines n-ten Viereckes ist $A_n = a_n \cdot 1 = a_n$ FE

Die gesuchte Fläche wird bestimmt, indem wir alle einzelnen Flächen addieren

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) \cdot 1 =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \ \text{(FE)}$$

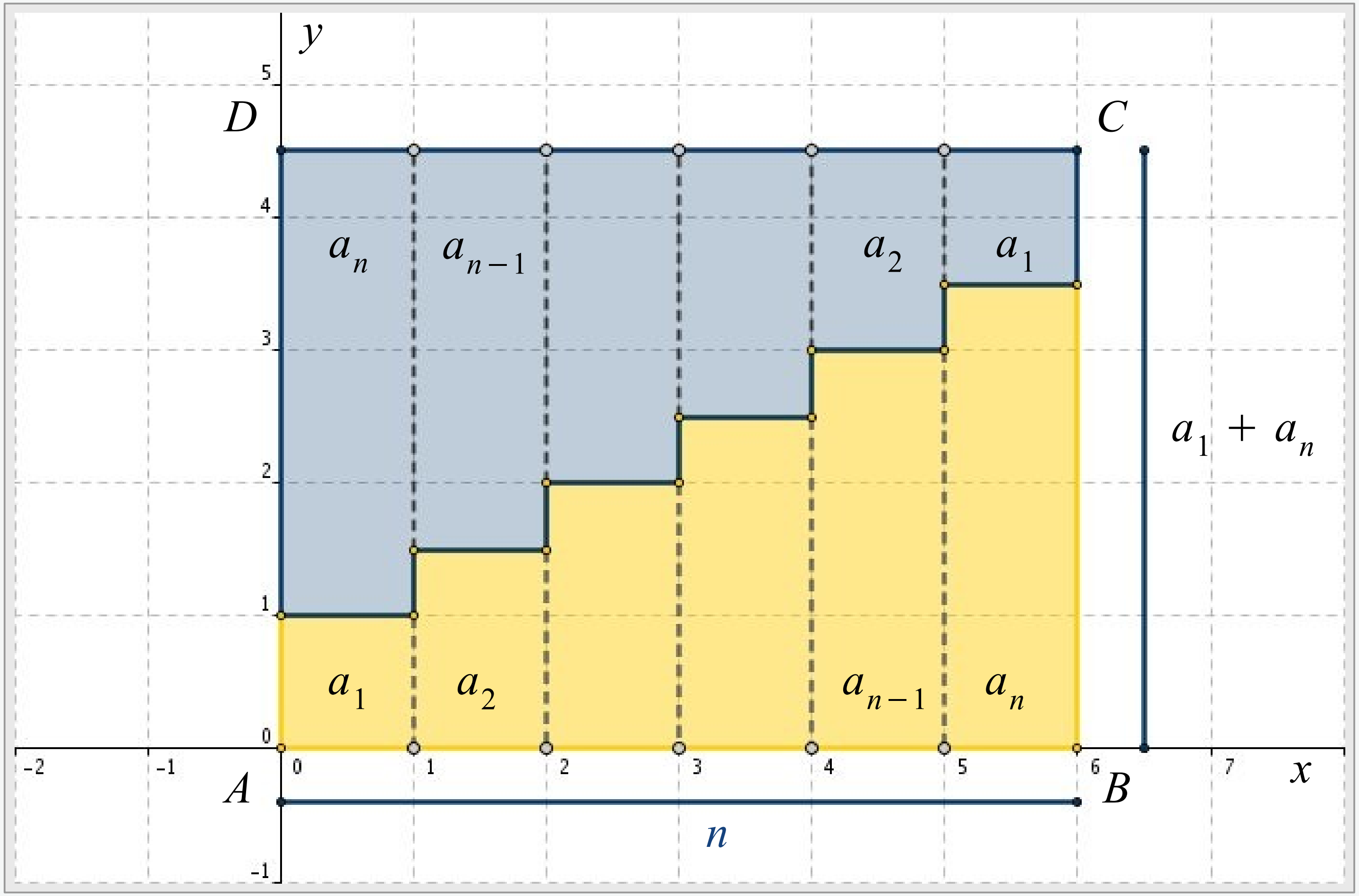


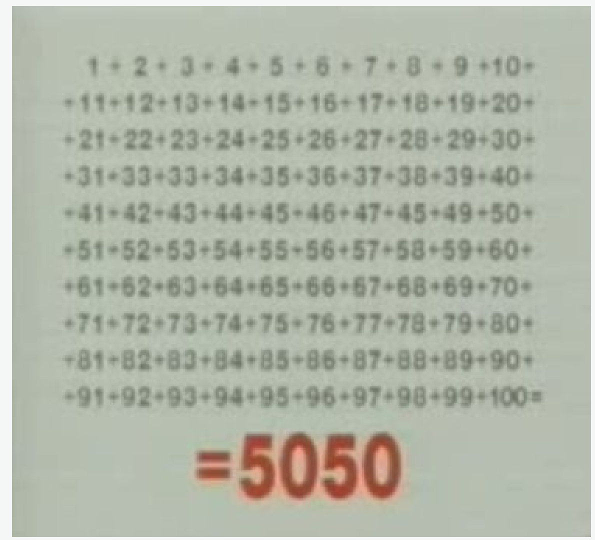
Abb. 1-2: Graphische Illustration einer Partialsumme

$$AB = n\,, \qquad AD = a_1 + a_n\,, \qquad A_{ABCD} = AB \cdot AD = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{1}{2}\, A_{ABCD} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Carl Friedrich Gauß

Dem später berühmten Mathematiker Gauß wurde in der Schule die Aufgabe “Summiere die Zahlen von 1 bis 100” gestellt, die er nach kurzer Zeit des Nachdenkens mit dem Ergebnis “5050” beantwortete.



Er erkannte, dass sich in der Summe

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

das 1. und das 100. Glied, das 2. und das 99. usw. jeweils zu 101 ergänzen.

Die sich ergänzenden “letzten beiden” Zahlen sind dabei 50 und das 51:

$$1 + 100 = 101, \quad 2 + 99 = 101, \quad 3 + 98 = 101, \ldots$$

$$\ldots, \quad 49 + 52 = 101, \quad 50 + 51 = 101$$

Insgesamt 50 Mal ergänzen sich zwei Zahlen zu 101, also ist

$$S_{100} = 50 \cdot 101 = \frac{100}{2} \left(100 + 1 \right) = 5050$$

Die Aufgabe an den Schüler Gauß kann man so formulieren: “Berechne die Summe der ersten 100 Folgenglieder der Folge

$$S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100} = \sum_{i=1}^{100} i$$