Folgen mit einer expliziten Bildungsvorschrift

Explizite Bildungsvorschrift

Einige Zahlenfolgen lassen sich durch eine explizite Bildungsvorschrift darstellen.

Zahlenfolge:	Bildungsvorschrift:
1. $\langle a_n \rangle = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots$	$a_n = n$
2. $\langle a_n \rangle = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots$	$a_n = \frac{1}{n}$
3. $\langle a_n \rangle = 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \dots$	$a_n = (-1)^{n+1}\ \frac{1}{n}$
4. $\langle a_n \rangle = \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \dots$	$a_n = \frac{n}{n+1}$
5. $\langle a_n \rangle = 1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ \dots$	$a_n = n^3$
6. $\langle a_n \rangle = -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ \dots$	$a_n = (-1)^n\ 2^n$
7. $\langle a_n \rangle = 10,\ \sqrt{10},\ \sqrt[3]{10},\ \sqrt[4]{10},\ \sqrt[5]{10},\ \dots$	$a_n = 10^{\frac{1}{n}}$

Die Folgen

$$\left\langle a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\rangle = 1, \; -\frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; -\frac{1}{4}, \; \frac{1}{5}, \; -\frac{1}{6}, \; \ldots$$

$$\langle a_n = (-1)^n \, 2^n \rangle = -2, \; 4, \; -8, \; 16, \; -32, \; \ldots$$

stellen alternierende Folgen dar.

Definition:

Alternierende Folgen haben eine wesentliche Eigenschaft, ihre Werte steigen oder sinken nicht kontinuierlich, sondern die Folgeglieder wechseln beständig ihr Vorzeichen. Eine alternierende Folge enthält meist einen Faktor, bei dem eine negative Zahl in eine, vom Laufindex abhängige Potenz erhoben wird, wie z.B.:

$$(-1)^n$$

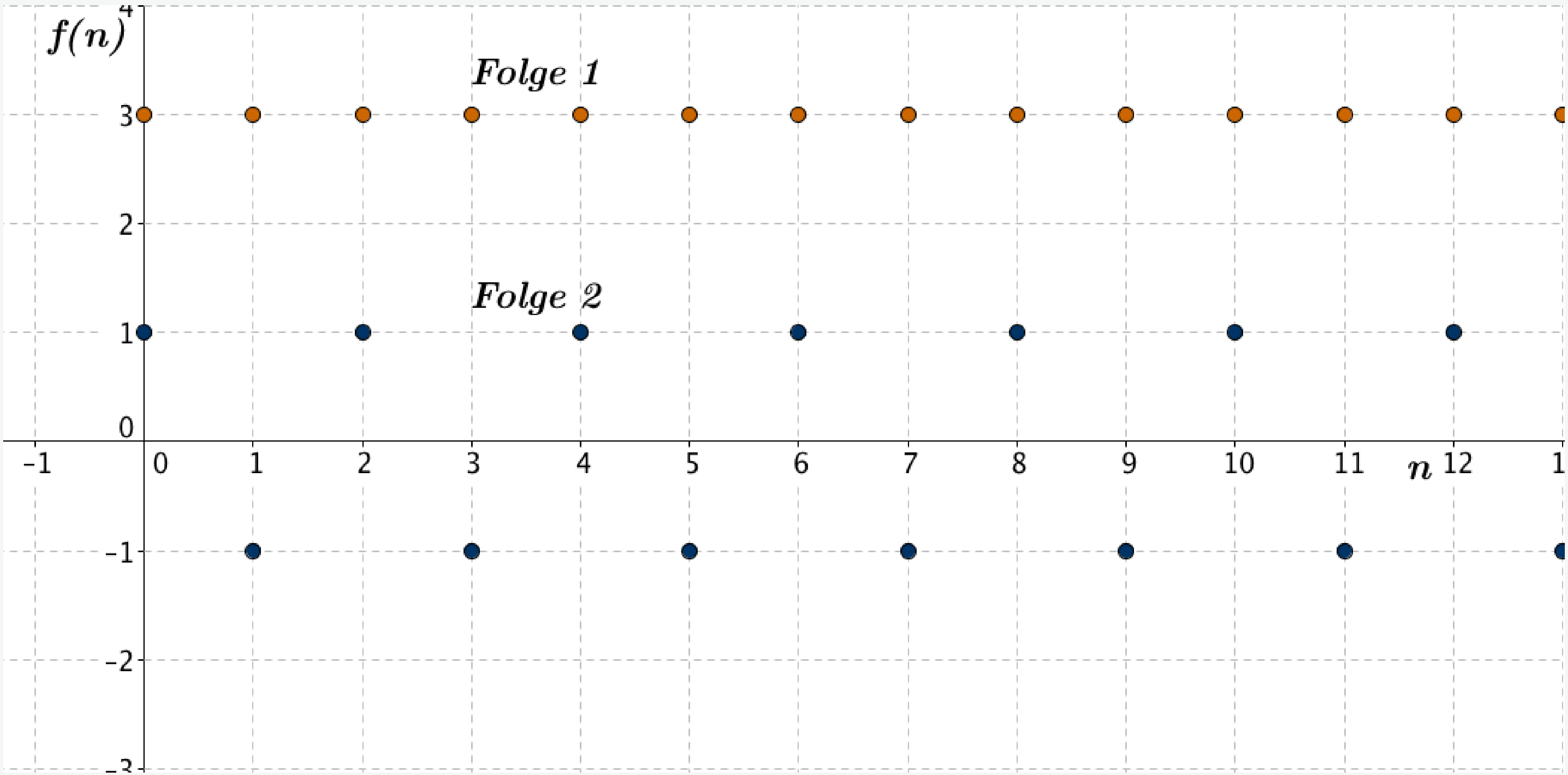

Abb. 1-1: Schaubilder der Folgen 1 und 2. Der Index n ist horizontal aufgetragen, die Größe der Folgenglieder vertikal

Folge 1 : $a_n = 3$, *Folge* 2 : $a_n = (-1)^n$

Folge 1 ist eine konstante Folge, Folge 2 ist eine alternierende Folge.

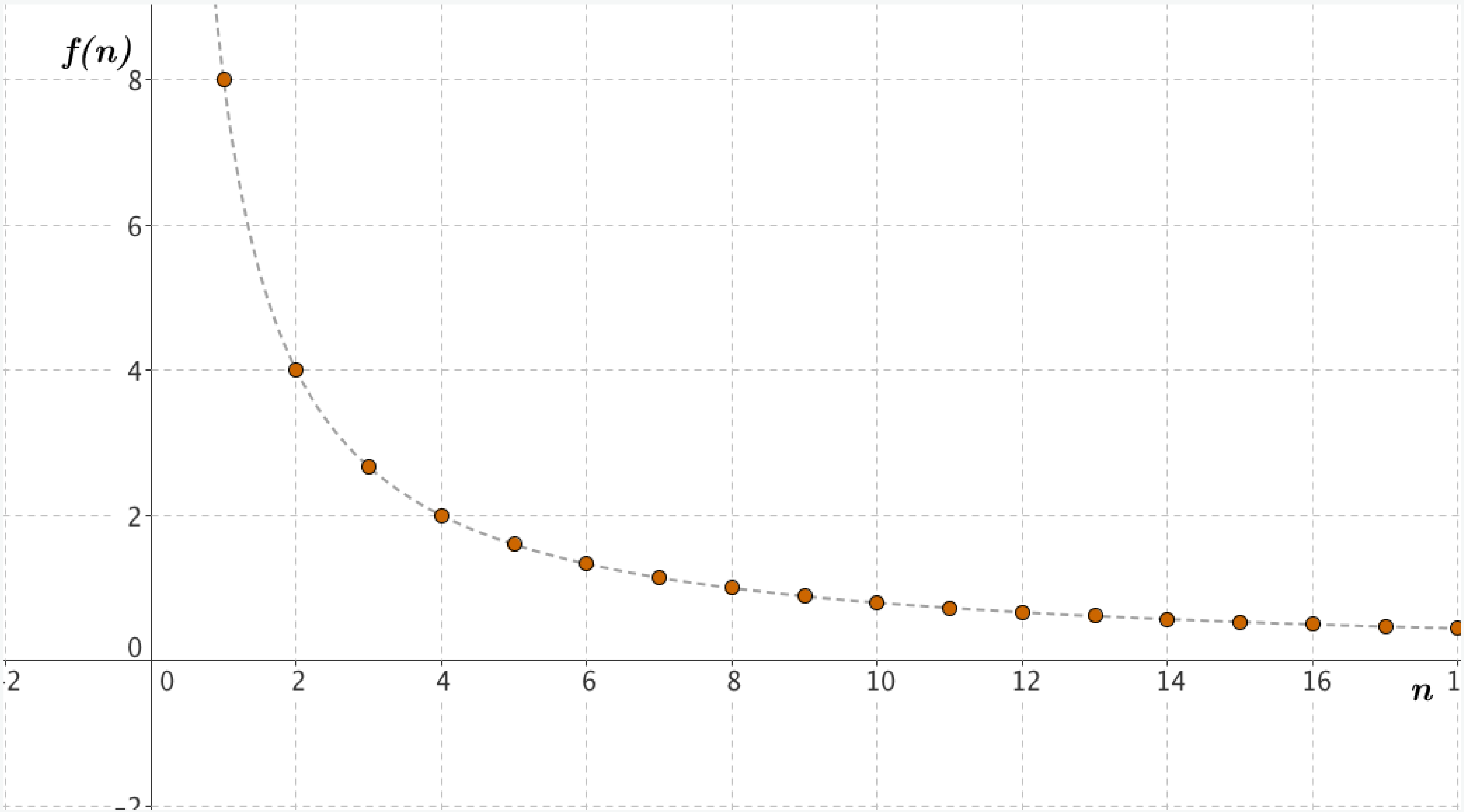

Abb. 1-2: Schaubild der Folge mit dem Bildungsvorschrift 8/n

$$\left\langle a_n = \frac{8}{n} \right\rangle = 8,\ 4,\ \frac{8}{3},\ 2,\ \frac{8}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{7},\ 1,\ \frac{8}{9},\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{11},\ \frac{2}{3},\ \ldots$$

Aufgabe 1:

Berechnen Sie jeweils das 2. und das 4. Glied der Folge mit der Bildungsvorschrift:

$a)\quad \langle a_n \rangle = \left\langle 2 + \frac{1}{n} \right\rangle, \qquad b)\quad \langle b_n \rangle = \langle \sqrt{2 + n} \rangle$

$c)\quad \langle c_n \rangle = \left\langle \frac{3n + 2}{n} \right\rangle, \qquad d)\quad \langle d_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \right\rangle$

Aufgabe 2:

Vorgegeben seien einige Glieder einer Folge. Geben Sie die Bildungsvorschrift an:

$a)\quad \langle a_n \rangle = 10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \ldots$

$b)\quad \langle a_n \rangle = 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{11},\ \ldots$

$c)\quad \langle a_n \rangle = 2,\ \frac{5}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{17}{4},\ \frac{26}{5},\ \frac{37}{6},\ \ldots$

Lösung 1:

$$a)\quad \langle a_n \rangle = \left\langle 2 + \frac{1}{n} \right\rangle, \qquad a_2 = \frac{5}{2}, \quad a_4 = \frac{9}{4}$$

$$b)\quad \langle b_n \rangle = \langle \sqrt{2 + n} \rangle, \qquad b_2 = 2, \quad b_4 = \sqrt{6}$$

$$c)\quad \langle c_n \rangle = \left\langle \frac{3n + 2}{n} \right\rangle, \qquad c_2 = 4, \quad c_4 = \frac{7}{2}$$

$$d)\quad \langle d_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \right\rangle, \qquad d_2 = \frac{1}{5}, \quad d_4 = \frac{1}{17}$$

Lösung 2:

$$a)\quad \langle a_n \rangle = 10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \dots, \qquad a_n = 13 - 3n$$

$$b)\quad \langle a_n \rangle = 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{11},\ \dots, \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n - 1}$$

$$c)\quad \langle a_n \rangle = 2,\ \frac{5}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{17}{4},\ \frac{26}{5},\ \frac{37}{6},\ \dots, \qquad a_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfolge

Allgemein bilden wir aus zwei gegebenen Folgen

$$\langle a_n \rangle \quad \text{und} \quad \langle b_n \rangle$$

durch gliedweises Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren neue Folgen, nämlich die

Summenfolge $\langle a_n + b_n \rangle = a_1 + b_1, \; a_2 + b_2, \; \ldots, \; a_n + b_n, \; \ldots$

Differenzfolge $\langle a_n - b_n \rangle = a_1 - b_1, \; a_2 - b_2, \; \ldots, \; a_n - b_n, \; \ldots$

Produktfolge $\langle a_n \cdot b_n \rangle = a_1 \cdot b_1, \; a_2 \cdot b_2, \; \ldots, \; a_n \cdot b_n, \; \ldots$

Quotientenfolge $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \frac{a_1}{b_1}, \; \frac{a_2}{b_2}, \; \ldots, \; \frac{a_n}{b_n}, \; \ldots \qquad b_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$

Die Umkehrung dieses Prozesses bei Folgen ist die Folgenzerlegung.

Die Folge $\langle c_n \rangle = \left\langle \dfrac{1 + 2n}{n^2} \right\rangle$

kann als Summenfolge aufgefasst werden

$$\langle c_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle, \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle, \quad \langle b_n \rangle = \left\langle \frac{2}{n} \right\rangle$$

Aufgabe 3:

Bilden Sie aus den Folgen

$$\langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle, \quad \langle b_n \rangle = \left\langle \frac{2}{n^2} \right\rangle$$

die Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfolge. Geben Sie jeweils die ersten 3 Glieder und die Bildungsvorschrift an.

Aufgabe 4:

Beantworten Sie die Frage: Worin besteht der Unterschied zwischen einer Folge und der Menge der Folgenglieder?

$$\langle s_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle = \left\langle n^2 + \frac{2}{n^2} \right\rangle$$

$$s_1 = 1 + 2 = 3\,, \qquad s_2 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\,, \qquad s_3 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9}$$

$$\langle d_n \rangle = \langle a_n - b_n \rangle = \left\langle n^2 - \frac{2}{n^2} \right\rangle$$

$$d_1 = 1 - 2 = -1\,, \qquad d_2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}\,, \qquad d_3 = 9 - \frac{2}{9} = \frac{79}{9}$$

$$\langle p_n \rangle = \langle a_n \cdot b_n \rangle = \left\langle n^2 \cdot \frac{2}{n^2} \right\rangle = \langle 2 \rangle$$

$$p_1 = 2\,, \qquad p_2 = 2\,, \qquad p_3 = 2$$

$$\langle q_n \rangle = \left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \left\langle n^2 \cdot \frac{n^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{n^4}{2} \right\rangle$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad q_2 = 8\,, \qquad q_3 = \frac{3^4}{2} = \frac{81}{2}$$

Bei einer Folge kommt es auf die Reihenfolge der Glieder an. Dagegen besitzt eine Menge keine Information über die “Reihenfolge” ihrer Elemente. So sind z.B. die Folgen

$$a_n = 1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7, \ldots$$

$$b_n = -1, 1, -3, 3, -5, 5, -7, 7, \ldots$$

$$c_n = -1, -3, -5, -7, 1, 3, 5, 7, \ldots$$

verschieden, die Menge ihrer Folgenglieder aber gleich.

Die Glieder einer Folge sind durch ihren Index voneinander unterschieden, auch wenn sie dasselbe Element der Menge bezeichnen. Die Folge *-2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, . . .* besitzt unendlich viele Elemente, dagegen die Menge der Glieder nur zwei Elemente enthält.