Das Rechnen mit den Nullfolgen

Nullfolgen sind konvergente Folgen mit den Grenzwert 0.

1) Die Summe von n Nullfolgen, wo n eine begrenzte Zahl ist, ist eine Nullfolge.

2) Die Differenz zweier Nullfolgen ist eine Nullfolge.

3) Das Produkt von Nullfolgen ist eine Nullfolge.

4) Falls eine Folge eine Nullfolge und die andere eine beschränkte Folge ist, ist das Produkt von beiden Folgen eine Nullfolge

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0\,, \qquad \lim_{n \to \infty} b_n = b\,, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Wir zeigen, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n+1} \sin \dfrac{\pi \sqrt{n+2}}{n^2 + 4n} = 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi \sqrt{n+2}}{n^2 + 4n} = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n = a \cdot b$$

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \qquad b_n = \sin \frac{\pi \sqrt{n+2}}{n^2 + 4n}$$

Die Folge b_n ist beschränkt $-1 \leqslant \sin \dfrac{\pi \sqrt{n+2}}{n^2 + 4n} \leqslant 1$

Die Folge a_n ist die Nullfolge $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi \sqrt{n+2}}{n^2 + 4n} = 0$$

1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty, \quad b_n$ – von unten beschränkt

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty, \quad b_n$ – von oben beschränkt

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = -\infty$$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty, \quad b_n > M > 0, \quad \lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$

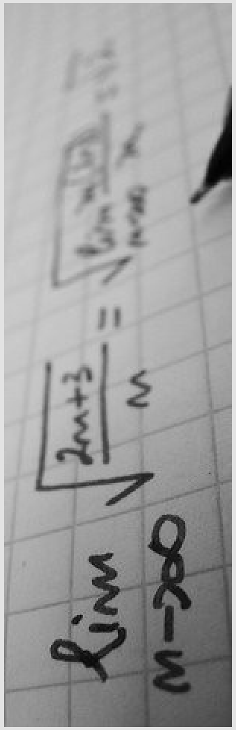
4) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty, \quad 0 < b_n < M, \quad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad |b_n| > M > 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$|a_n| < M, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$|a_n| > M > 0, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty, \quad b_n \geqslant a_n \ \forall\, n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$$



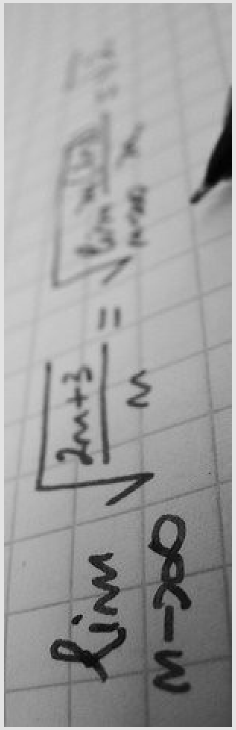
$$a_n = n^2, \qquad b_n = \sin^3(n^2 + n) + 2$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty, \qquad 1 \leqslant b_n \leqslant 3$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = +\infty, \qquad \lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

Das Rechnen mit Grenzwerten: Aufgabe 3



Folgende Folgen

$$a_n = n + 3\,, \qquad b_n = n + 2$$

$$c_n = n\,, \qquad d_n = 2\,n\,, \qquad f_n = n^2$$

werden gegeben, so dass

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} d_n = \lim_{n \to \infty} f_n = +\infty$$

Bestimmen Sie Grenzwerte folgender Folgen

$$a_n - b_n\,, \qquad a_n - c_n\,, \qquad b_n - c_n\,, \qquad c_n - f_n$$

$$\frac{a_n}{b_n}\,, \qquad \frac{c_n}{d_n}\,, \qquad \frac{c_n}{f_n}\,, \qquad \frac{f_n}{d_n}$$

$$a_n = n + 3\,, \quad b_n = n + 2\,, \quad c_n = n\,, \quad d_n = 2n\,, \quad f_n = n^2$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} ((n+3) - (n+2)) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - c_n) = \lim_{n \to \infty} ((n+3) - n) = 3$$

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - c_n) = \lim_{n \to \infty} ((n+2) - n) = 2$$

$$\lim_{n \to \infty} (c_n - f_n) = \lim_{n \to \infty} (n - n^2) = \lim_{n \to \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = -\infty$$

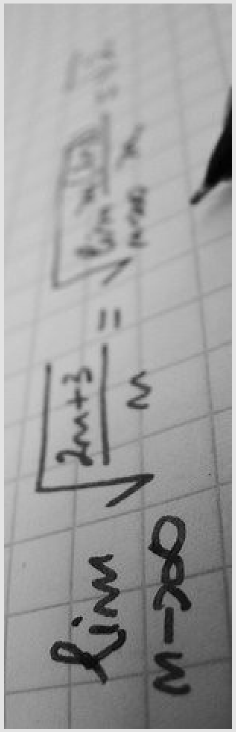
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+3}{n+2} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{d_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{f_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{d_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} n = +\infty$$

Das Rechnen mit Grenzwerten: Aufgabe 4



Folgende Folgen

$$a_n = -n , \qquad f_n = -n^2 , \qquad d_n = -\sqrt{n} ,$$

$$b_n = \frac{1}{n} , \qquad c_n = \frac{5}{n}$$

werden gegeben, so dass

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} d_n = -\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} c_n = 0$$

Bestimmen Sie Grenzwerte folgender Folgen

$$a_n \cdot b_n , \qquad a_n \cdot c_n , \qquad \frac{d_n}{a_n} , \qquad a_n \cdot d_n$$

$$f_n \cdot b_n , \qquad d_n \cdot b_n , \qquad f_n \cdot c_n , \qquad c_n \cdot d_n$$

$$a_n = -n\,, \qquad f_n = -n^2\,, \qquad d_n = -\sqrt{n}\,, \qquad b_n = \frac{1}{n}\,, \qquad c_n = \frac{5}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} \left((-n)\,\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot c_n) = \lim_{n \to \infty} \left((-n)\,\frac{5}{n} \right) = -5$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_n}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\sqrt{n})}{(-n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot d_n) = \lim_{n \to \infty} \left((-n)\,(-\sqrt{n}) \right) = \lim_{n \to \infty} n^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} (f_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} \left((-n^2)\,\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} (-n) = -\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} (d_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} \left((-\sqrt{n})\,\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} (f_n \cdot c_n) = \lim_{n \to \infty} \left((-n^2)\,\frac{5}{n} \right) = 5 \lim_{n \to \infty} (-n) = -\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} (c_n \cdot d_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{5}{n}(-\sqrt{n}) \right) = -5 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0$$