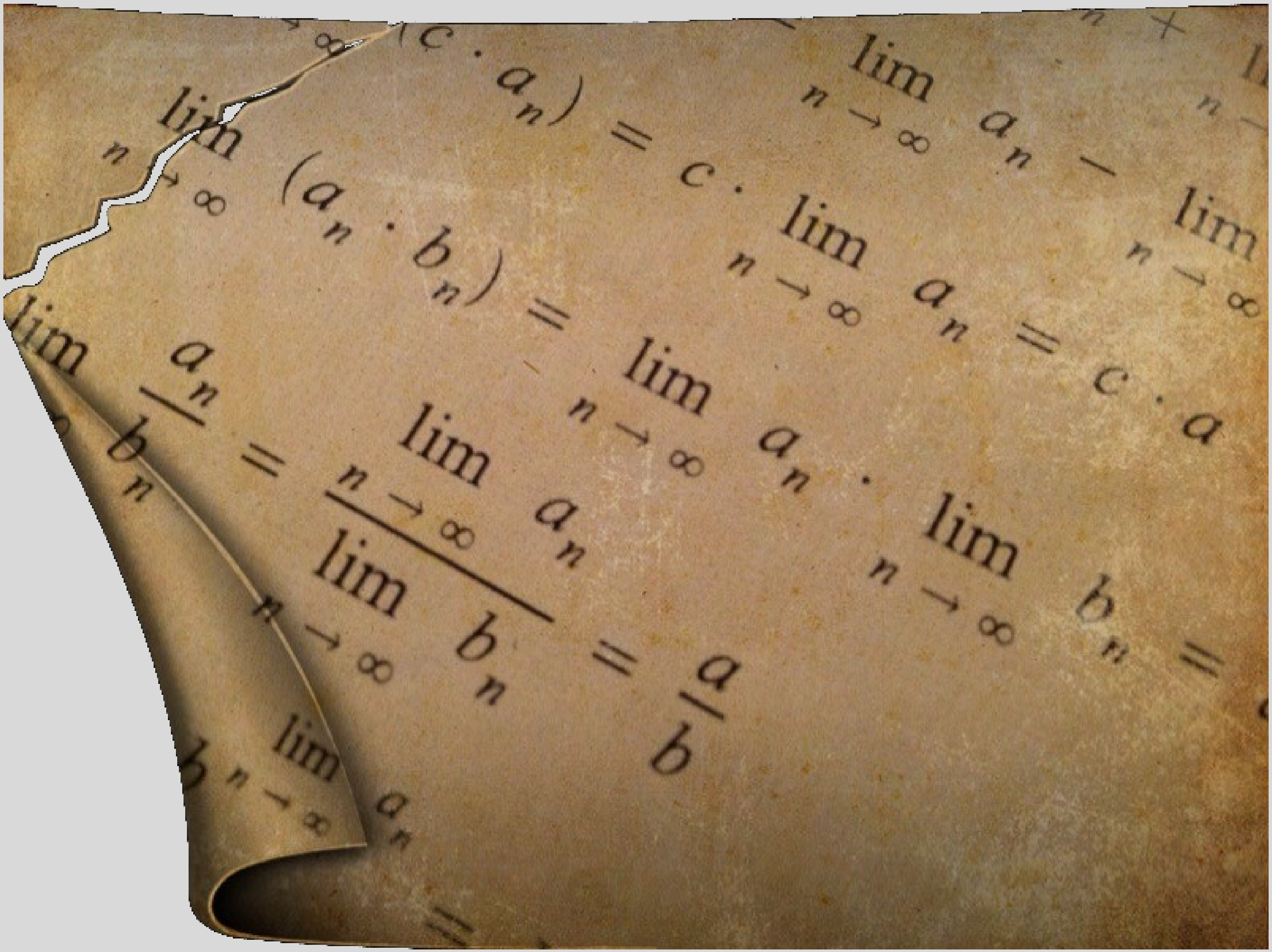

Grenzwerte von Folgen

Die Berechnung von Grenzwerten kann oft ziemlich umständlich sein. Die entwickelten Regeln vereinfachen oft solche Berechnungen. Diese Regeln beruhen darauf, dass man Folgen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann.

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Folgen

$$a_n = 5 + \frac{1}{n^3}, \qquad b_n = 2 - \frac{3}{n}$$

Die Grenzwerte lauten

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 5, \qquad \lim_{n \to \infty} b_n = 2$$

Bestimmen Sie aus den beiden Folgen die Summen-, Differenz-, die Produkt- und die Quotientenfolge und bestimmen jeweils den Grenzwert

$$a_n = 5 + \frac{1}{n^3}, \qquad b_n = 2 - \frac{3}{n}$$

$$a_n + b_n = 7 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}, \qquad \lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = 7$$

$$a_n - b_n = 3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}, \qquad \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 3$$

$$a_n \cdot b_n = 10 - \frac{15}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^4}, \qquad \lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = 10$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{5 + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{3}{n}}, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{5}{2}$$

Es seien zwei konvergente Folgen mit folgenden Grenzwerten

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \qquad \lim_{n \to \infty} b_n = b$$

Dann sind die Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotienten-folge ebenfalls konvergent und es gibt:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = a + b$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = a - b$$

$$\lim_{n \to \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \to \infty} a_n = c \cdot a$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{n \to \infty} b^{a_n} = b^{\lim\limits_{n \to \infty} a_n} = b^a, \qquad \lim_{n \to \infty} b_n^{a_n} = b^a$$

Es seien zwei konvergente Folgen mit dem gleichen Grenzwert a:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \,, \qquad \lim_{n \to \infty} b_n = a$$

Gilt für die Glieder der dritten Folge für alle Indizes n, die größer als ein fester Index sind, die Einschließung

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$$

so ist auch diese Folge konvergent mit gleichem Grenzwert a.

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n + 5}{4n - 7}, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3 - n}{7n + 12}, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{6n + 5}{14n},$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{11n + 7n^2}{14n^2 + 12n}, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n^2 - 9n}{11 - 15n^2}, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^3 + 6n}{13n + 9n^3},$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n - 9n^2}{12n^3 + 15n}, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{12n - 4}{17n + 5n^2}, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{6n^3 + 2n}{3n^2 + 8n},$

a) $$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+5}{4n-7} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{4 - \frac{7}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} 2 = 2, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{5}{n} = 5 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} 4 = 4, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{7}{n} = 7 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3-n}{7n+12} = -\frac{1}{7}, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{6n+5}{14n} = \frac{3}{7},$$

b) $$\lim_{n \to \infty} \frac{11n+7n^2}{14n^2+12n} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{5n^2-9n}{11-15n^2} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^3+6n}{13n+9n^3} = \frac{1}{3}$$

$$c)\quad \lim_{n \to \infty} \frac{3n - 9n^2}{12n^3 + 15n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{3n}{n^3} - \dfrac{9n^2}{n^3}}{\dfrac{12n^3}{n^3} + \dfrac{15n}{n^3}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{3}{n^2} - \dfrac{9}{n}}{12 + \dfrac{15}{n^2}} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{12n - 4}{17n + 5n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{6n^3 + 2n}{3n^2 + 8n} = \lim_{n \to \infty} \frac{6n + \dfrac{2}{n}}{3 + \dfrac{8}{n}} = \infty$$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$a)\quad \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{6n - 7}{3n + 14} \right)^2 \frac{n}{3n^2 - n}$

$b)\quad \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1 - 3n}{4n + 5} \right)^3 \frac{\sqrt{n} + 2}{n^2 + n + 1}$

$c)\quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{5n^2 - 2n}{10n^2 + 11n} \cdot \frac{6n^2 + 1}{3n^2 - n}$

$d)\quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n - 7}{12n + 9} \cdot \frac{\cos n}{8n + 15}$

$e)\quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 1 + \sin n}{n^2 + n + 1}$

$$a)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{3n+14}\right)^2\frac{n}{3n^2-n}=4\cdot 0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{3n+14}\right)^2=2^2=4,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^2-n}=0$$

$$b)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-3n}{4n+5}\right)^3\frac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1}=\left(-\frac{3}{4}\right)^3\cdot 0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-3n}{4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}-3}{4+\dfrac{5}{n}}=-\frac{3}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n^2 - 2n}{10n^2 + 11n} \cdot \dfrac{6n^2 + 1}{3n^2 - n} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^2 - 2n}{10n^2 + 11n} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{6n^2 + 1}{3n^2 - n} = 2.$$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n - 7}{12n + 9} \cdot \dfrac{\cos n}{8n + 15} = \dfrac{3}{12} \cdot 0 = 0$

$$\frac{\cos n}{8n + 15} < \frac{1}{8n + 15}, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{8n + 15} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 1 + \sin n}{n^2 + n + 1} = 1$$

$$\frac{n^2 + 2n + 1 + \sin n}{n^2 + n + 1} = \frac{(n^2 + n + 1) + n + \sin n}{n^2 + n + 1} =$$

$$= 1 + \frac{n + \sin n}{n^2 + n + 1} =$$

$$0 < \frac{n + \sin n}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{n + 1}{n^2 + n + 1} < \frac{2n}{n^2 + n + 1} < \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n + \sin n}{n^2 + n + 1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 1 + \sin n}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \to \infty} 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{n + \sin n}{n^2 + n + 1} = 1$$

Bestimmen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n$$

1. Variante:

$$\sqrt{n^2 + 1} - n =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} < \frac{1}{2\,n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\,n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) = \lim_{n \to \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

2. Variante: Binomische Reihe mit positiven Exponenten

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm m\,x + \frac{m\,(m-1)}{2!}\,x^2 \pm \dots$$

$$m > 0, \qquad |\,x\,| \leqslant 1$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad m = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{n^2} \leqslant 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{8\,n^4} \simeq 1 + \frac{1}{2\,n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) \simeq \lim_{n \to \infty} n \left(1 + \frac{1}{2\,n^2} - 1 \right) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\,n} = 0$$

Es seien eine reelle Konstante c und eine reelle Zahl $|\, q \,| < 1$, dann gilt

$$1)\quad \lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

$$2)\quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$3)\quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$4)\quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n\,!} = \infty$$

$$1)\quad \lim_{n \to \infty} q^n = 0, \qquad |q| < 1$$

$$|q| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |q|^{-1} > 1, \quad |q|^{-1} = 1 + a, \quad a > 0$$

Die Bernoullische Ungleichung liefert dann:

$$\left(|q|^{-1}\right)^n = (1+a)^n > 1 + n a > n a \quad \Rightarrow$$

$$|q|^n < \frac{1}{n a} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

$$2)\quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1, \qquad c \in \mathbb{R}, \quad c > 1$$

$$x_n = \sqrt[n]{c} - 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{c} = x_n + 1 \quad \Rightarrow \quad c = (x_n + 1)^n$$

$$c = (x_n + 1)^n > 1 + n x_n \quad \Rightarrow \quad x_n < \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$3)\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad n \geqslant 2$$

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1, \qquad \sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[n]{n} = \alpha_n + 1 \quad \Rightarrow \quad n = (1 + \alpha_n)^n \quad \Rightarrow$$

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geqslant 1 + n\,\alpha_n + \frac{n\,(n-1)}{2}\,\alpha_n^2 > \frac{n\,(n-1)}{2}\,\alpha_n^2$$

$$n - 1 \geqslant \frac{n}{2} \quad (n \geqslant 2) \quad \Rightarrow \quad n > \frac{n\,(n-1)}{2}\,\alpha_n^2 \geqslant \frac{n^2}{4}\,\alpha_n^2 \quad \Rightarrow$$

$$1 > \frac{n}{4}\,\alpha_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n^2 < \frac{4}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$0 < \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n + 1) = 1$$

Jakob Bernoulli (1655-1705)

In der Mathematik versteht man unter der Bernoullischen Ungleichung eine wichtige Ungleichung, mit der sich eine Potenzfunktion nach unten abschätzen lässt

Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und jede nicht negative Zahl $n \geq 0$ gilt

$$\boxed{(1 + x)^n \geqslant 1 + n x}$$

Benannt ist die Ungleichung nach dem schweizerischen Mathematiker Jakob Bernoulli.

Im Folgenden werden wir zeigen, wie wir diese Ungleichung bei Abschätzungen von Grenzwerten der Folgen benutzen können.

Die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + c)^n > 1 + n\,c \qquad \forall\, c \in \mathbb{R} > -1 \quad \wedge \quad \forall\, n \in \mathbb{N} > 1$$

Die Bernoullische Ungleichung beweist man mittels vollständiger Induktion:

Induktionsschritt 1: $n = 2$

$$(1 + c)^2 = 1 + 2\,c + c^2 > 1 + 2\,c$$

Induktionsschritt 2: $n = 3$

$$(1 + c)^3 = 1 + 3\,c + 3\,c^2 + c^3 > 1 + 3\,c$$

Induktionsschritt n – 1: wenn $(1 + c)^n > 1 + n\,c$,
das gilt auch für $n + 1$

$$(1 + c)^n > 1 + n\,c \quad \Rightarrow \quad (1 + c)^n \cdot (1 + c) > (1 + n\,c) \cdot (1 + c)$$

$$\Rightarrow \quad (1 + c)^{n+1} > 1 + c + n\,c + n\,c^2 > 1 + (1 + n)\,c$$