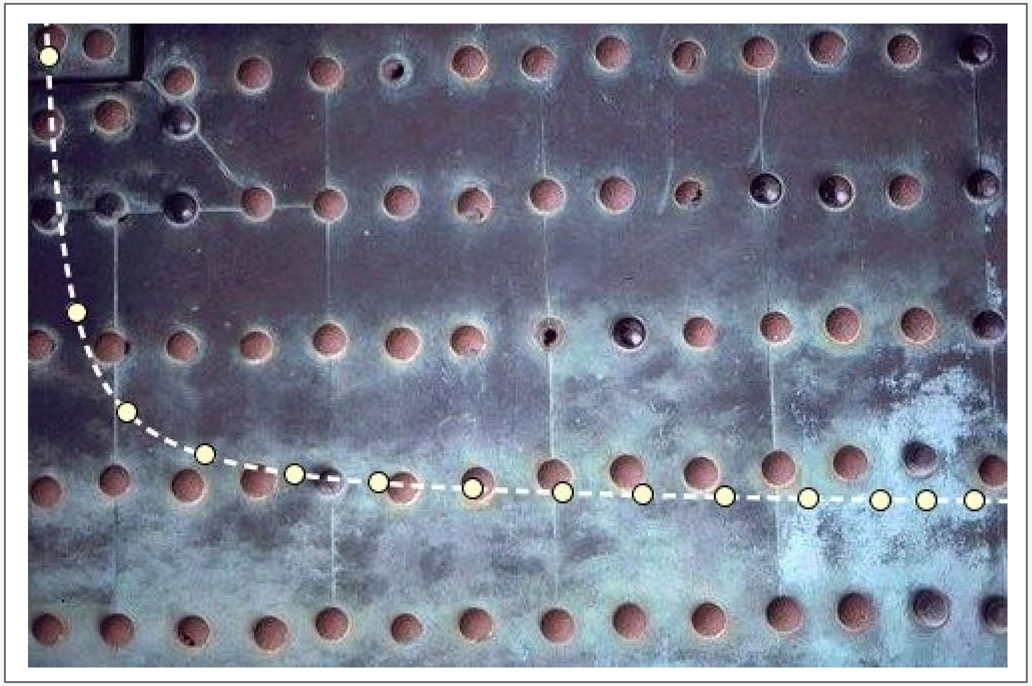

http://www.flickr.com/photos/andrewpaulcarr/237103165/

Konvergenz monotoner und beschränkter Folgen

Wir stellen den Zusammenhang zwischen Monotonie bzw. Beschränktheit und Konvergenz von Folgen her, indem wir folgende Frage beantworten:

1) Sind monotone Folgen stets konvergent?

2) Sind beschränkte Folgen stets konvergent?

3) Sind konvergente Folgen stets monoton?

4) Sind konvergente Folgen stets beschränkt?

Konvergenz monotoner Folgen: zur Frage 1

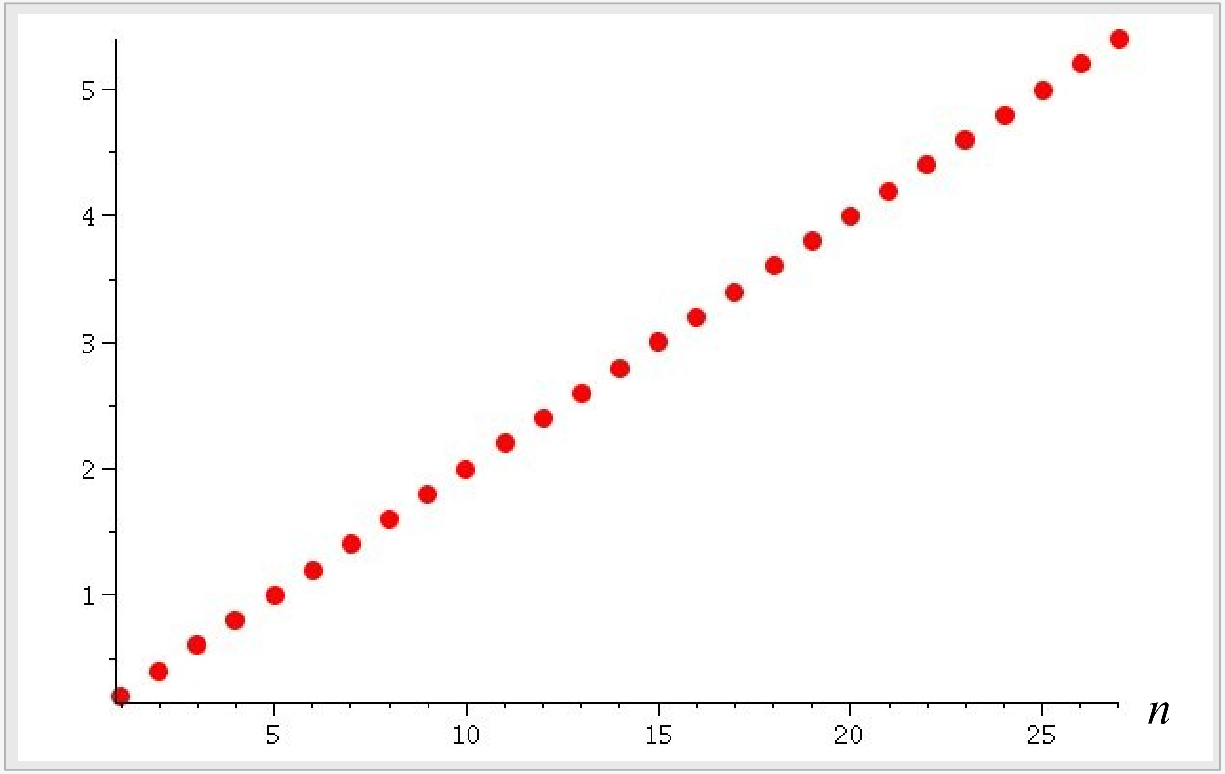

Abb. 1: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = 0.2\, n\,, \qquad \lim_{n \to \infty} 0.2\, n = \infty$$

Die Folge ist streng monoton steigend und divergent.

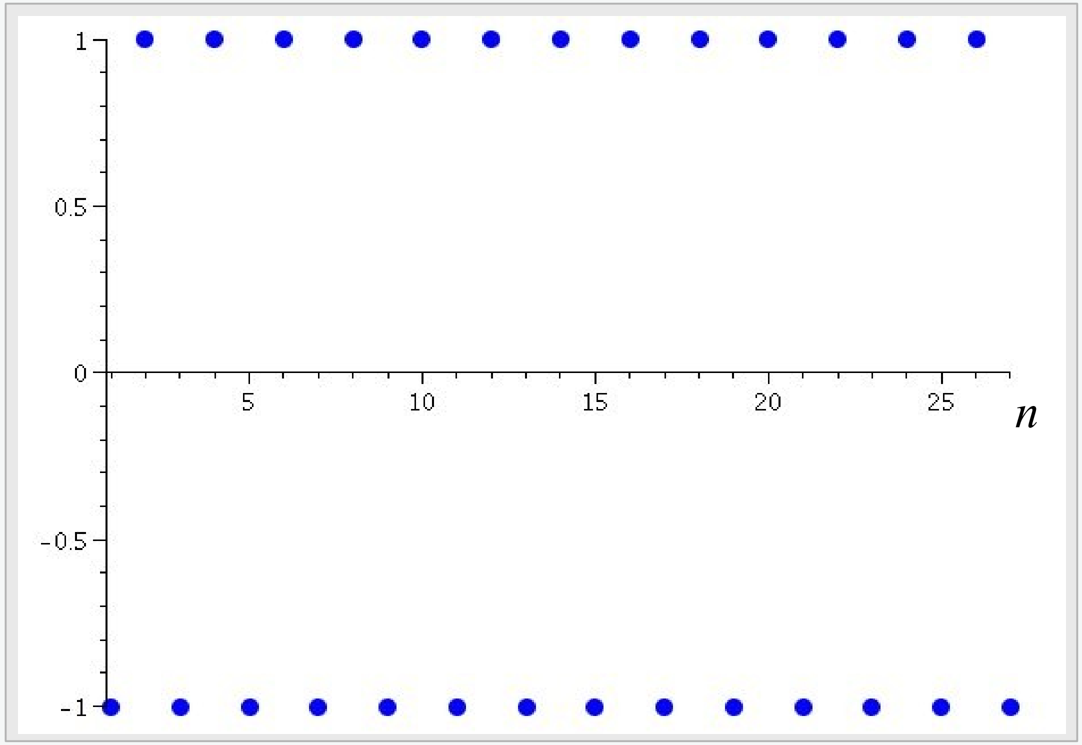

Abb. 2: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = (-1)^{n+1}, \qquad s = -1, \qquad S = 1$$

Die Folge ist beschränkt und nicht konvergent.

Wenn eine Folge aber beschränkt und monoton ist, dann ist sie konvergent.

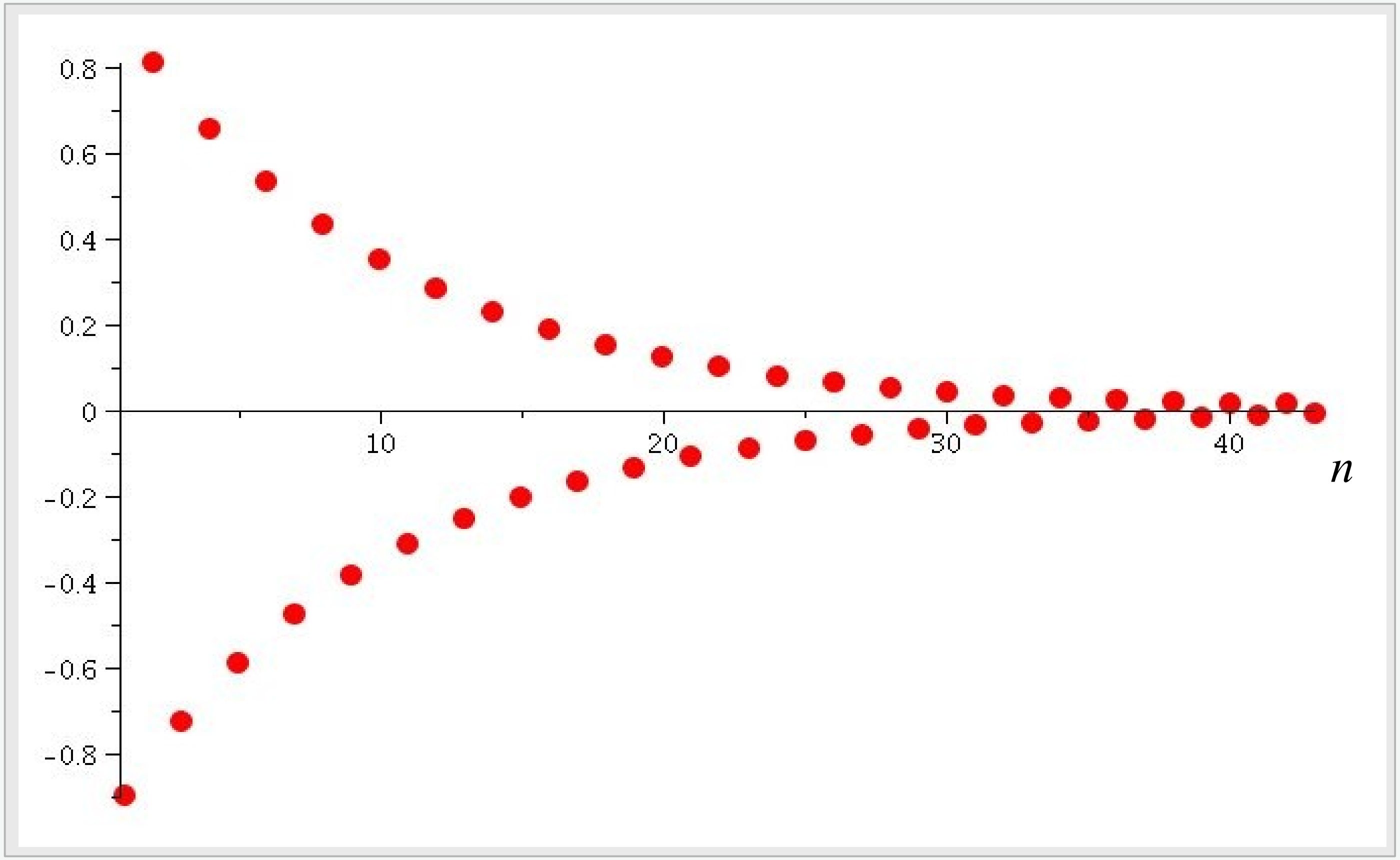

Abb. 3: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = (-0.9)^{n+1}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Die konvergente Folge ist nicht monoton.

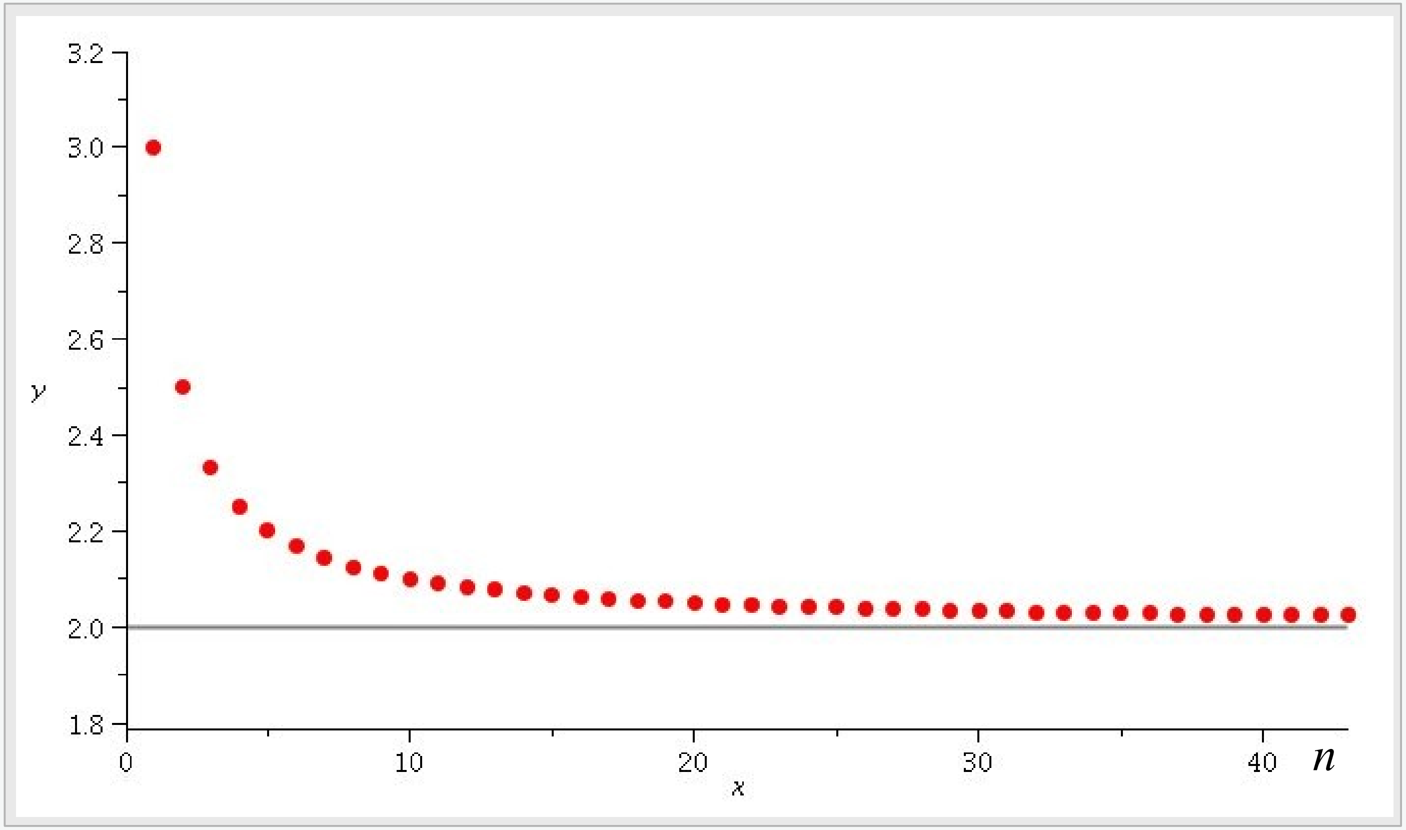

Abb. 4: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = 2 + \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 2$$

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Machen Sie sich die folgenden Aussagen an Beispielen klar. Sind die Aussagen richtig?

1) Eine konstante Folge kann keine Nullfolge sein.

2) Eine monoton fallende Folge ist stets eine Nullfolge.

3) Eine monoton steigende Folge ist niemals eine Nullfolge.

4) Es gibt keine geometrische Folge, die Nullfolge ist.

Aussage 1: Eine konstante Folge kann keine Nullfolge sein.

Es gibt genau eine konstante Folge, die Nullfolge ist, nämlich

$$0, 0, 0, \ \ldots$$

denn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$a_n = 0 \in U_\varepsilon(0) \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

Alle übrigen konstanten Folgen sind keine Nullfolgen.

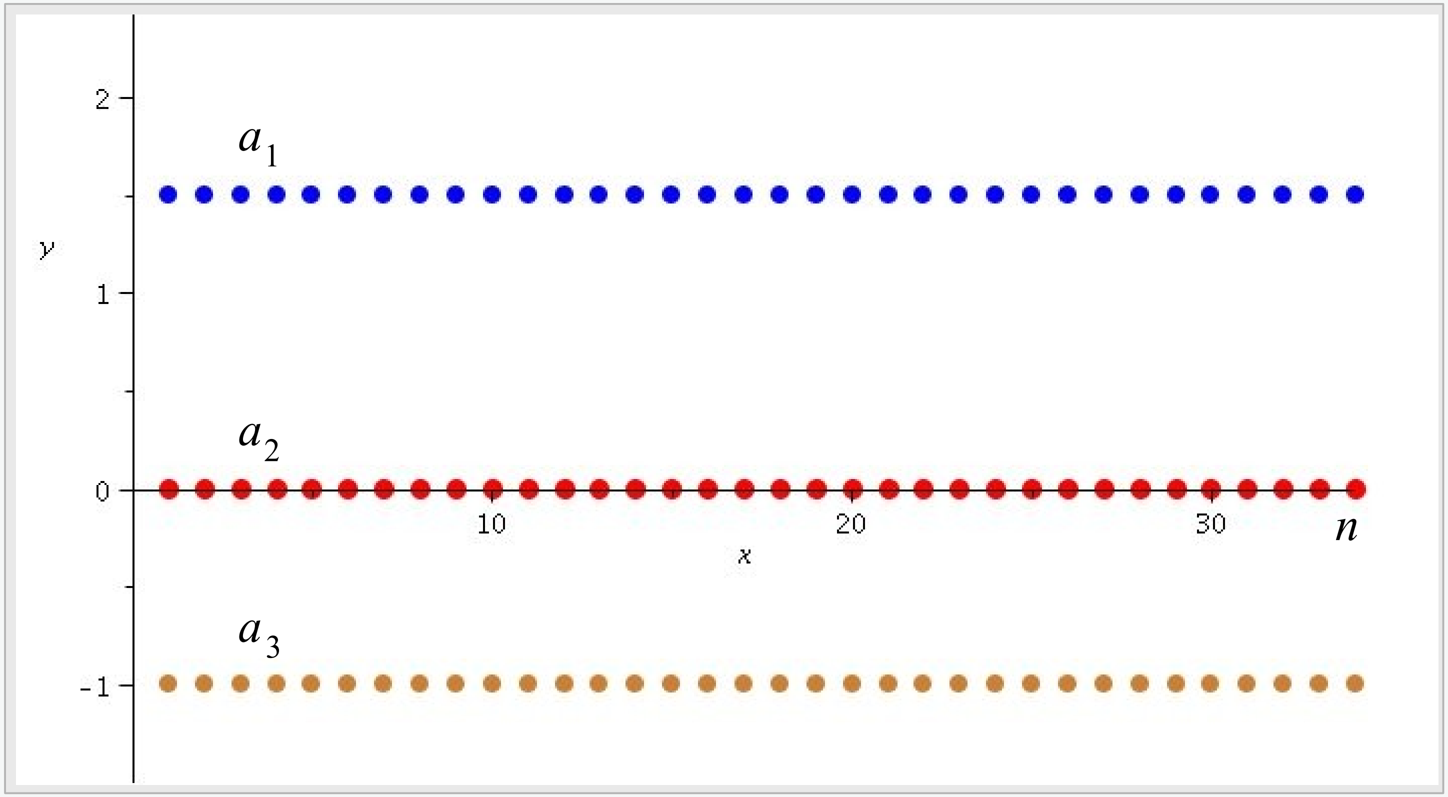

Abb. 5-1: Drei konstante Folgen

$$a_1 = 1.5, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -1$$

Aussage 2: Eine monoton fallende Folge ist stets eine Nullfolge.

Es gibt beliebig viele Gegenbeispiele zu dieser Aussage:

1) $\langle a_n = 3 - 0.5\, n \rangle = 2.5,\ 2,\ 1.5,\ 1,\ 0,\ -0.5,\ -1,\ \dots$

2) $\langle b_n = 4 - 0.01\, n^2 \rangle = 3.99,\ 3.96,\ 3.91,\ 3.84,\ 3.75,\ 3.64,\ \dots$

3) $\langle c_n = 2 - \sqrt{n} \rangle = 1,\ 2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{3},\ 0,\ 2-\sqrt{5},\ 2-\sqrt{6},\ \dots$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} c_n = -\infty$$

4) $\langle d_n = 1 + \frac{2}{n} \rangle = 3,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{9}{7},\ \dots$

$$\lim_{n \to \infty} d_n = 1$$

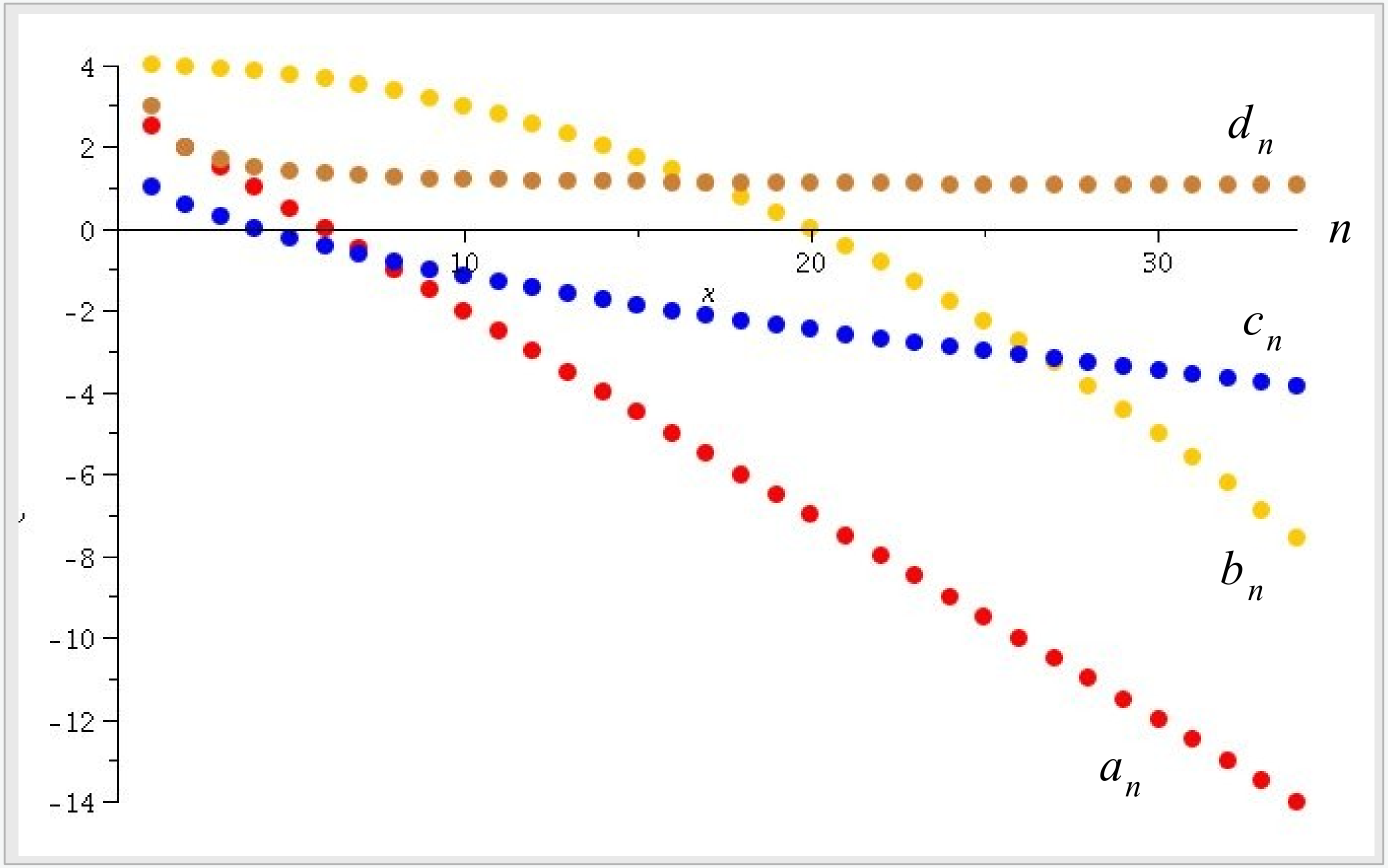

Abb. 5-2: Vier monoton fallende Folgen

$$a_n = 3 - 0.5\,n\,, \qquad b_n = 4 - 0.01\,n^2\,, \qquad c_n = 2 - \sqrt{n}\,, \qquad d_n = 1 + \frac{2}{n}$$

Aussage 3: Eine monoton steigende Folge ist niemals eine Nullfolge.

Es gibt beliebig viele Gegenbeispiele zu dieser Aussage:

1) $\left\langle a_n = -\frac{3}{n} \right\rangle = -3, \ -\frac{3}{2}, \ -1, \ -\frac{3}{4}, \ -\frac{3}{5}, \ -\frac{1}{2}, \ -\frac{3}{7}, \ \dots$

2) $\left\langle b_n = -\frac{2}{n^2} \right\rangle = -2, \ -\frac{1}{2}, \ -\frac{2}{9}, \ -\frac{1}{8}, \ -\frac{2}{25}, \ -\frac{1}{18}, \ \dots$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

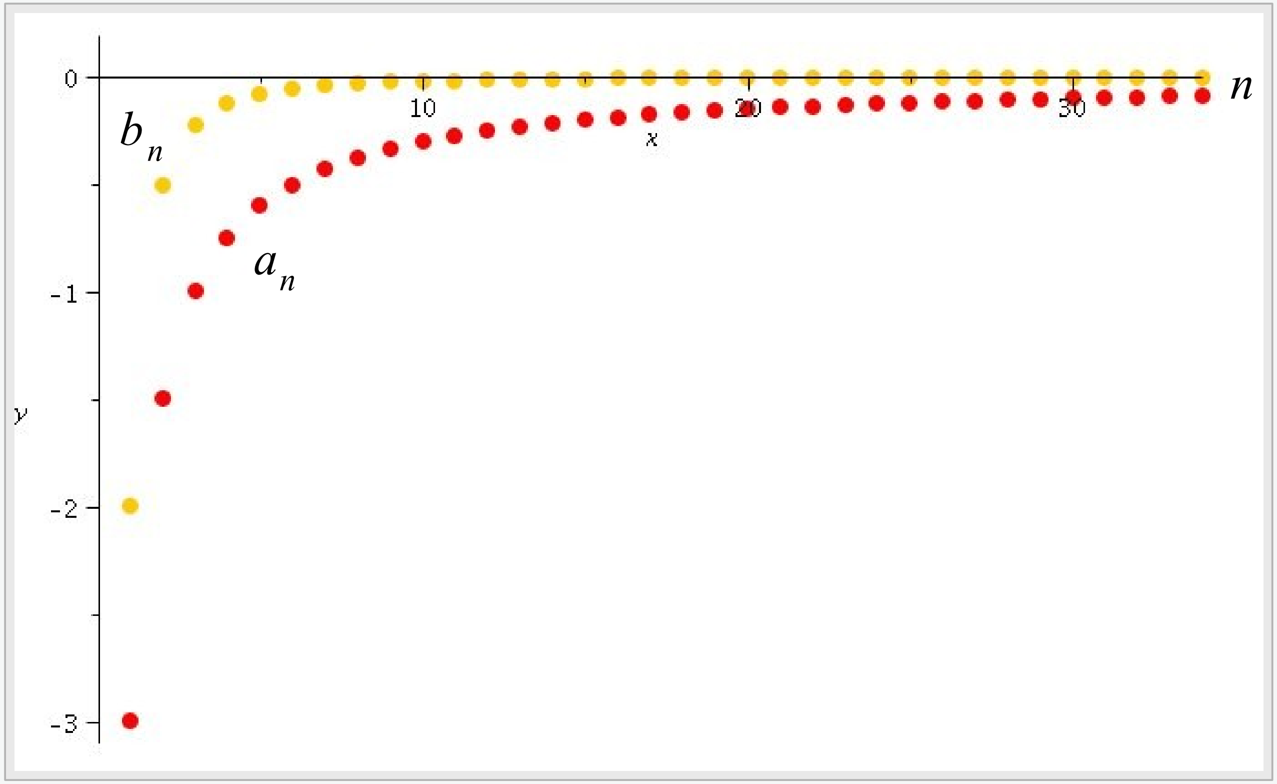

Abb. 5-3: Zwei monoton steigende Folgen

$$a_n = -\frac{3}{n}, \qquad b_n = -\frac{2}{n^2}$$

Aussage 4: Es gibt keine geometrische Folge, die Nullfolge ist.

Die Gegenbeispiele zu dieser Aussage sind:

$$1)\quad \left\langle a_n = \frac{1}{2^n} \right\rangle = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \dots$$

$$2)\quad \left\langle b_n = 0.5 \cdot (-0.9)^{n+1} \right\rangle = 0.405,\ -3.65,\ 0.328,\ -0.295,\ 0.266,\ \dots$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

Allgemein gilt:

Jede geometrische Folge mit dem Quotienten $|q| < 1$ ist Nullfolge.

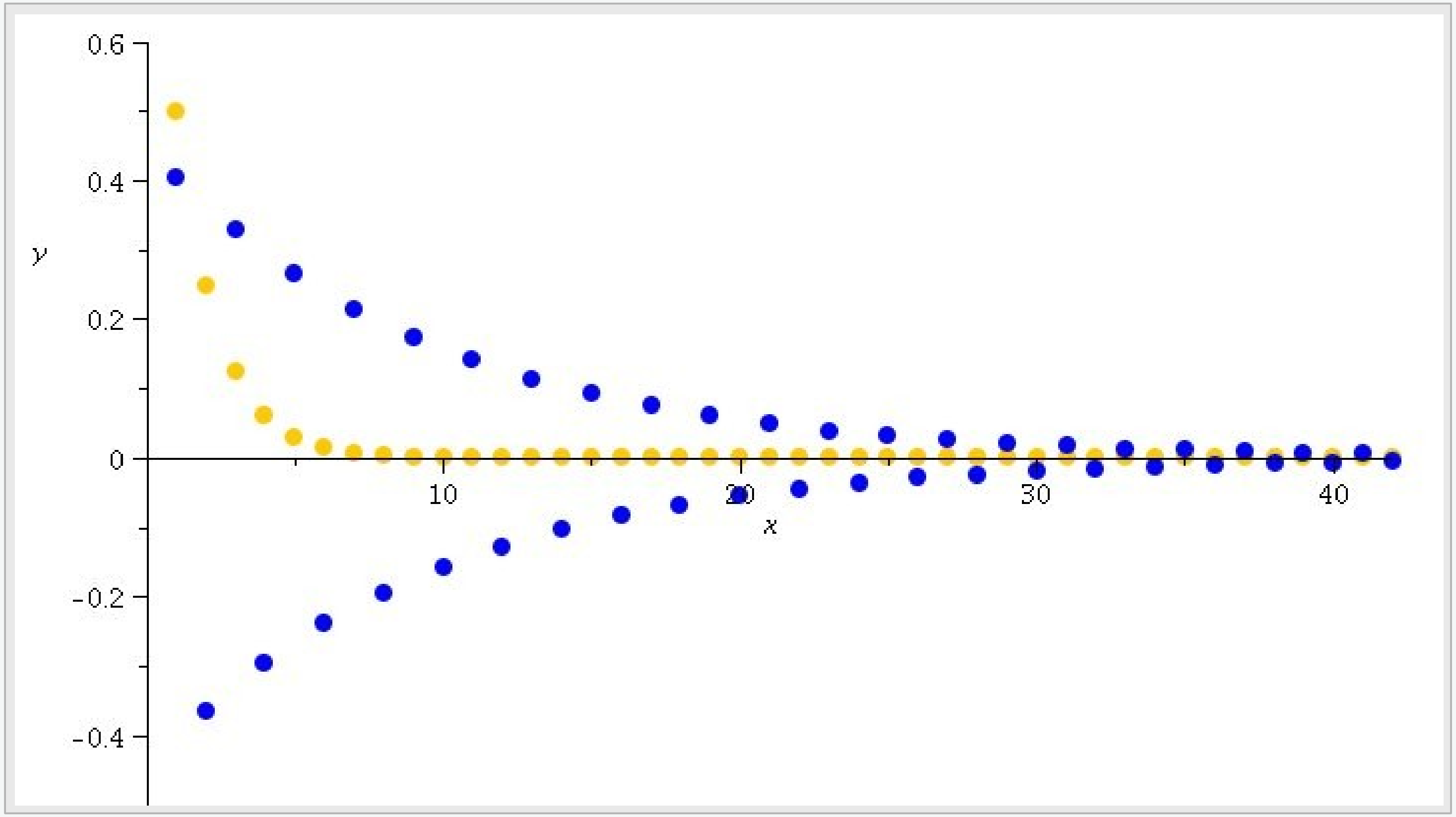

Abb. 5-4: Zwei geometrische Folgen, die Nullfolgen sind

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \qquad b_n = 0.5 \cdot (-0.9)^{n+1}$$