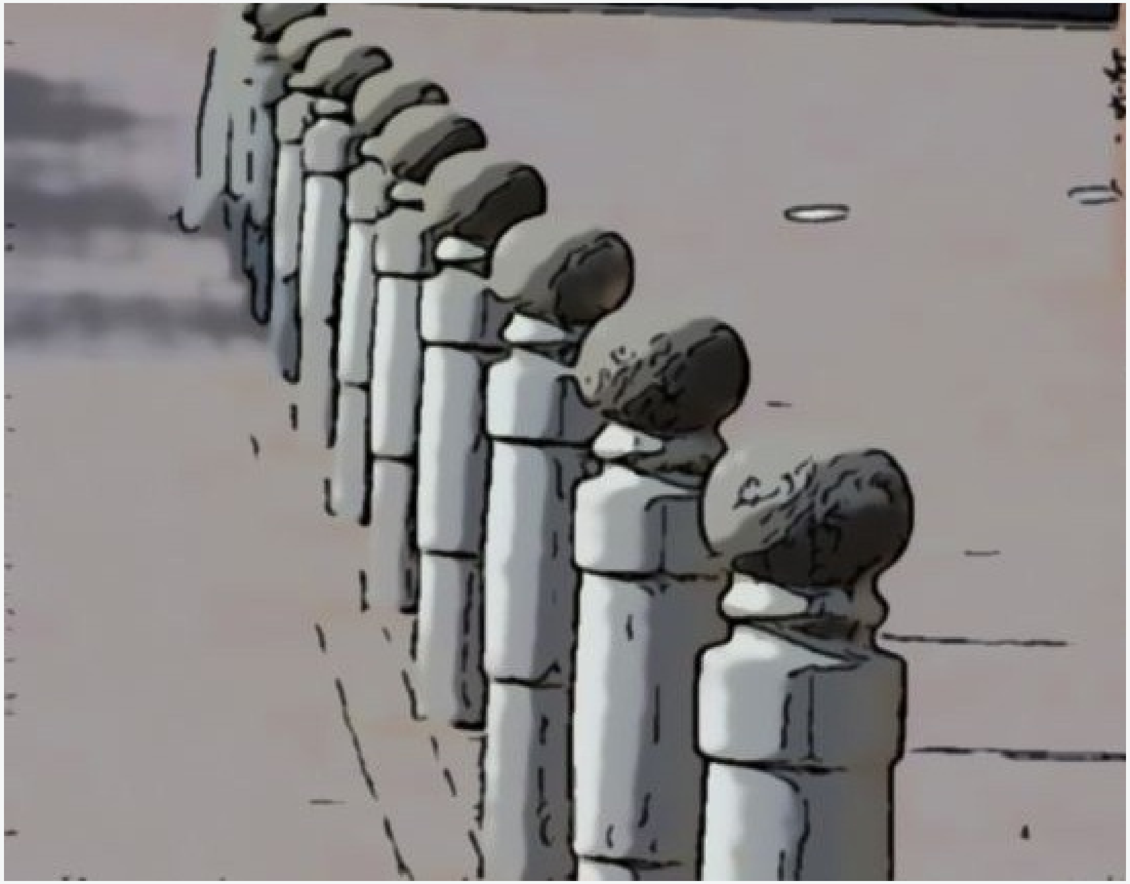

# *Reelle Zahlenfolgen, Einleitung*

## *Fibonacci Folge*


Folgen und Reihen bilden eine wichtige Grundlage der Analysis. Sie führen zum Begriff des Grenzwertes, der für die Differential- und die Integralrechnung von grundsätzlicher Bedeutung ist.

Die natürliche Zahl 8 wird fortlaufend halbiert und die sich nach $n$ Halbierungen jeweils ergebenden Werte werden notiert:

$$1)\ \frac{8}{2} = 4, \quad 2)\ \frac{4}{2} = 2, \quad 3)\ \frac{2}{2} = 1, \quad 4)\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad 5)\ \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4} \ \ldots$$

also die Zahlen: $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

Auf diese Weise wird eine Folge von Zahlen gebildet. Die Glieder dieser Folge sind nicht beliebige Zahlen, sonden unterliegen einer bestimmten Vorschrift. Das erste Glied dieser Folge ist also 4, das zweite 2 usw. Meist will man die Glieder der Folge nummerieren oder auf irgendeine Weise kennzeichnen, welches das erste, zweite, … , neunte usw Glied ist. Man kann das z.B. durch geordnete Paare darstellen.

$$(1,\ 4), \quad (2,\ 2), \quad (3,\ 1), \quad \left(4,\ \frac{1}{2}\right), \quad \left(5,\ \frac{1}{4}\right), \quad \left(6,\ \frac{1}{8}\right), \quad \left(7,\ \frac{1}{16}\right) \ldots$$

Für diese Folge können wir auch eine Vorschrift bestimmen, nach der das $n$-te Glied bestimmt wird, also 8 geteilt durch zwei hoch $n$. Durch diese Vorschrift wird einer natürlichen Zahl eindeutig eine bestimmte reelle Zahl zugeordnet:

$$n \ \rightarrow \ \frac{8}{2^n} \quad \text{oder} \quad \left(n,\ \frac{8}{2^n}\right)$$

## Eindeutige Zuordnung:

Es seien $X$ und $Y$ zwei (nichtleere) Mengen. Eine Zuordnung zwischen zwei Mengen $X$ und $Y$ heißt eindeutig, wenn sie jedem $x$ nur ein $y$ zuordnet.

$$x \in X \quad \to \quad y \in Y$$

### Beispiel 1:

Jeder natürlichen Zahl der Menge $X$ wird ein Element der Menge $Y$ zugeordnet, z.B. ihr Quadrat:

$$X = \mathbb{N}, \quad Y = \mathbb{N}, \quad x \to y: \quad n \to n^2 \quad \text{oder} \quad (n, \; n^2)$$

$$(1, 1), \; (2, 4), \; (3, 9), \; (4, 16), \; (5, 25), \ldots,$$

### Beispiel 2:

Jeder natürlichen Zahl der Menge $X$ wird ein Element der Menge $Y$ zugeordnet, hier ihre Quadratwurzel:

$$X = \mathbb{N}, \quad Y = \mathbb{R}, \quad x \to y: \quad n \to \sqrt{n} \quad \text{oder} \quad (n, \; \sqrt{n})$$

$$(1, 1), \; (2, \sqrt{2}), \; (3, \sqrt{3}), \; (4, 2), \; (5, \sqrt{5}), \ldots,$$

Definition 1:

Ordnet man den Elementen einer endlichen Teilmenge der natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zu, so entsteht eine endliche (reelle) Zahlenfolge.

Definition 2:

Eine eindeutige Zuordnung, die jeder natürlichen Zahl $n$ ein Element

$$n \to a_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 0$$

zuordnet, heißt unendliche (reelle) Zahlenfolge.

Definition 3:

Eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen und deren Wertebereich eine Teilmenge der reellen Zahlen ist, heißt reelle Zahlenfolge.

$$\langle a_n \rangle = \underbrace{a_1, a_2, a_3}, \ldots, \underbrace{a_n}, \ldots \qquad (n \in \mathbb{N})$$

*Index* *Glieder der Folge* *n-tes Glied der Folge*

Die Zahlen der Zahlenfolge werden Glieder der Zahlenfolge genannt.

Eine endliche Zahlenfolge besitzt endlich viele Glieder. Wesentlich interessanter sind unendliche Zahlenfolgen, bei denen durch ein Bildungsgesetz (eine Formel oder auch eine verbale Vorschrift) angegeben wird, wie man die Glieder der Folge erhält.

Zur Darstellung von Zahlenfolgen kann man wie bei Funktionen eine Wertetabelle anlegen, einen Graph zeichnen oder eine Gleichung aufstellen, z.B. :

$a)\ f(n) = n^2, \qquad b)\ f(n) = \sqrt{n}, \qquad c)\ f(n) = 2n - 19.$

Rekursion:

Eine Folge kann auch auf folgende Weise bestimmt werden:

$$a_{n+1} = 0.4\, a_n + 7, \qquad a_1 = 3$$

Mit dieser Gleichung und der Angabe des ersten Gliedes ist eine rekursive Bildungsvorschrift gegeben. Eine solche Vorschrift gibt an, wie man ein beliebiges Glied der Folge aus dem vorausgehenden Glied erhält. Rekursive Bildungsvorschriften können sich auch auf zwei oder mehr vorausgehende Glieder beziehen.

Eine rekursive Bildungsvorschrift muss neben der Rekursionsgleichung auch eine Angabe zum Anfangsglied bzw. zu Anfangsgliedern der Folge enthalten.

*recurrere (lat.) – zurücklaufen*

Ein Beispiel für eine Folge, deren rekursive Bildungsvorschrift sich auf zwei vorrausgehende Glieder bezieht, ist die sogenannte Fibonacci-Folge. Diese Folge ist nach Leonardo Fibonacci benannt, der mit dieser Folge 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieb.

Die Fibonacci-Folge ist eine unendliche Folge von Zahlen, bei der die Summe zweier benachbarter Zahlen die unmittelbar folgende Zahl ergibt:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Die Anfangsglieder der Fibonacci-Folge lauten dementsprechend

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

Die rekursive Berechnung der Fibonacci-Zahlen ist ziemlich umständlich. Will man z.B. die 100. Zahl berechnen, so muss man zuerst die ersten 99 Zahlen ermitteln.

*Leonardo Fibonacci von Pisa (etwa 1180 bis etwa 1250), italienischer Mathematiker*

*Abb. 1-1: Statue Leonardos, Camposanto di Pisa, 1863 (Wikipedia)*

Leonardo Fibonacci gilt als der erste europäische “Fachmathematiker” des Mittelalters. Er behandelte vor allem zahlentheoretische Probleme, wobei die von ihm angegebenen Lösungsverfahren über die Kenntnisse des arabischen und auch des griechischen Kulturkreises hinausgingen.

In Europa lag die Mathematik seit dem Niedergang der griechischen Kultur darnieder. Zunächst waren es die Inder, die mit der Entwicklung der Zahlensysteme und des Rechnens eine neue Blütezeit einleiteten. Anschließend brachten die Araber mit der Begründung der ebenen und räumlichen Trigonometrie die Entwicklung voran. Die Situation verlangte geradezu danach, jene Erkenntnisse auch in Europa zu verbreiten, und niemand war dazu besser berufen als Fibonacci, der all dieses Wissen aufgenommen und auch noch erweitert hatte.

*Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, Mannheim und DUDEN PAETEC GmbH, Berlin (www.schuelerlexikon.de)*

http://www.twistedlifestyle.com/Images/Liber-Abaci-Book-Of-Calculation-002.jpg

*Abb. 1-2: Liber abaci*

Im Jahre 1202 erschien das Werk von Leonardo Fibonacci "Liber abaci", die erste europäische Gesamtdarstellung der Arithmetik.

Vieles in seinen Werken hat Fibonacci von Vorgängern übernommen, systematisiert und bereichert. Mit einer Entdeckung indes ist sein Name bis heute verbunden. Den Ausgangspunkt dafür bildete eine zunächst sonderbar anmutende Problemstellung:

Wie viele Kaninchenpaare können in einem Jahr von einem einzigen Paar erzeugt werden, wenn Folgendes gelten soll:

1. Das Paar bringt monatlich ein neues Paar zur Welt.

2. Jedes neue Paar erzeugt vom zweiten Monat an monatlich ein neues Paar.

3. Es gibt in dieser Zeit keine Todesfälle.

*Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, Mannheim und DUDEN PAETEC GmbH, Berlin (www.schuelerlexikon.de)*

*Die Kaninchen-Aufgabe des Fibonaccis*

Im ersten Monat ist nur ein Paar vorhanden, im zweiten Monat sind es bereits zwei Paare. Im dritten Monat kommen vom ersten Paar ein neues und im vierten Monat vom ersten und zweiten Paar je ein neues hinzu, sodass dann insgesamt fünf Paare existieren. Das ergibt für die Gesamtzahlen die Folge 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . Setzt man vor das erste Glied als weiteres Glied eine 1, so erhält man die sogenannte Fibonacci-Folge.


Erst viel später stellte sich heraus, dass Fibonacci-Folge ganz unerwartet in anderen mathematischen Problemen eine Rolle spielt, so etwa beim Goldenen Schnitt, beim Pascalschen Dreieck und bei der logarithmischen Spirale.