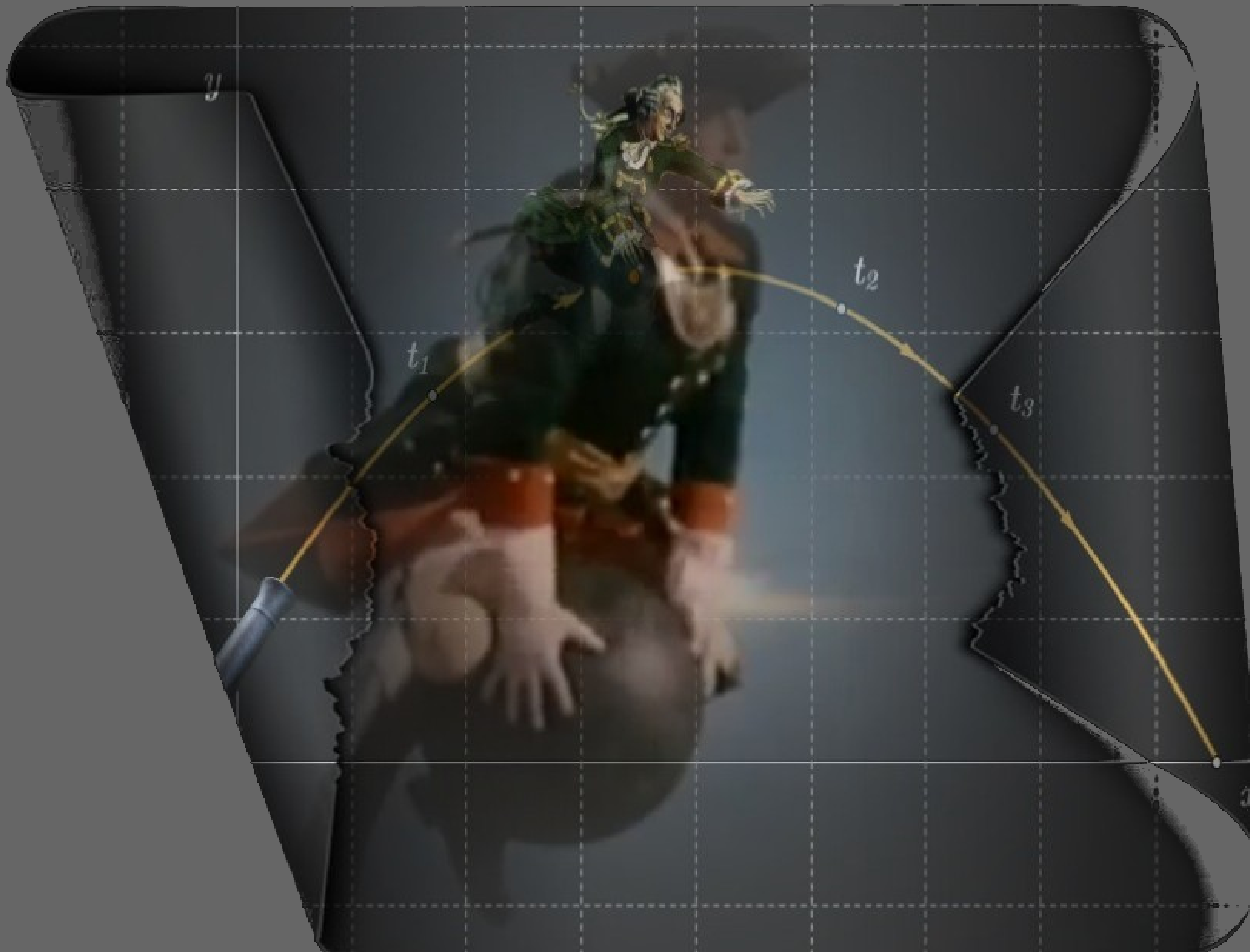


Parameterdarstellung einer Funktion

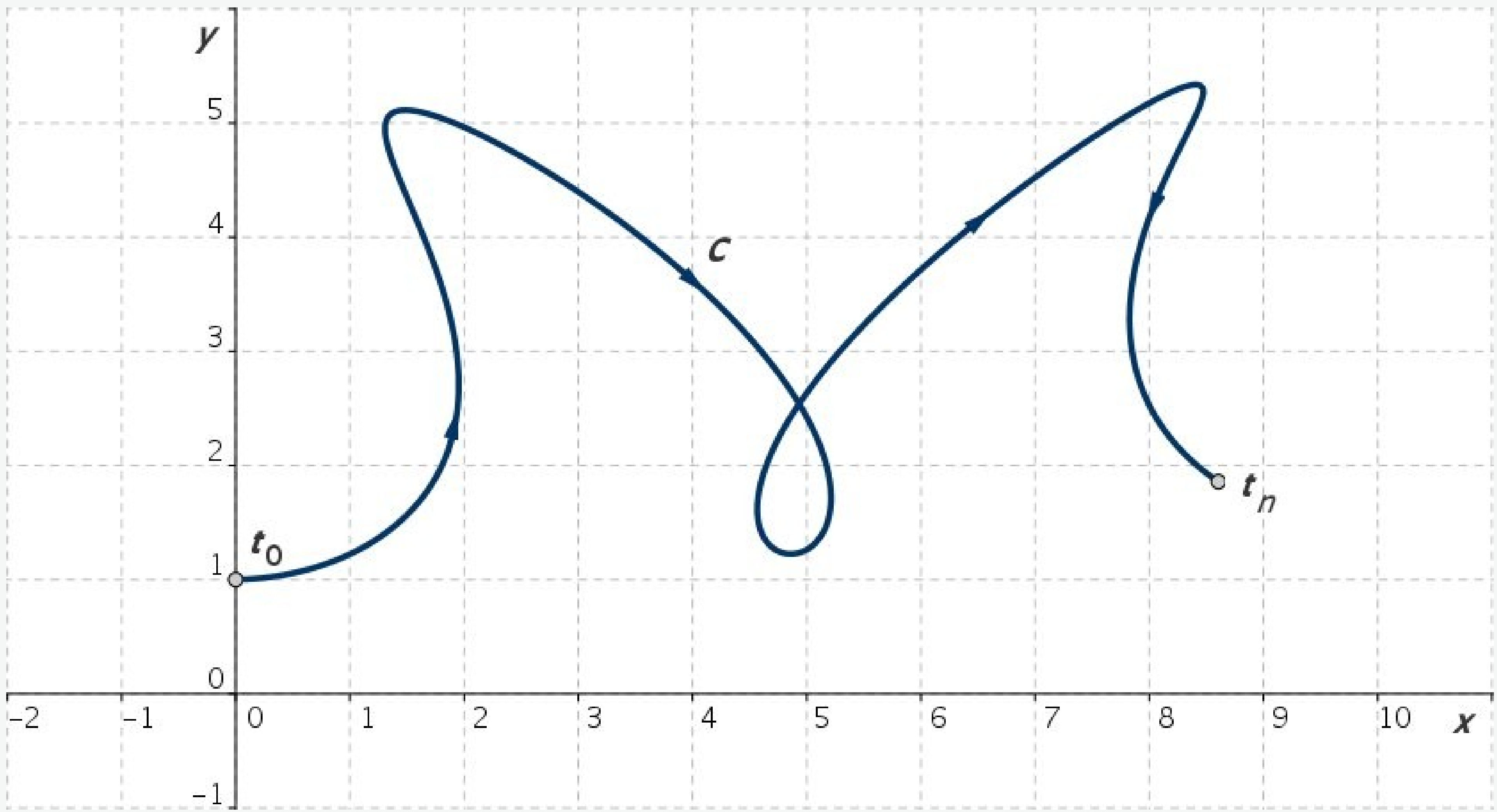


Abb. 1-1: Die Kurve C beschreibt die ebene Bewegung eines Teilchens

Eine ebene Kurve

Ein Teilchen bewegt sich in einer Ebene. Eine ebene Kurve C kann man in Form zweier Gleichungen darstellen

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_n .$$

Diese Darstellung nennt man Parameterdarstellung einer Kurve mit einem Parameter t. In Beschreibungen von ebenen Bewegungen spielt die Zeit häufig die Rolle eines Parameters.

Wikipedia

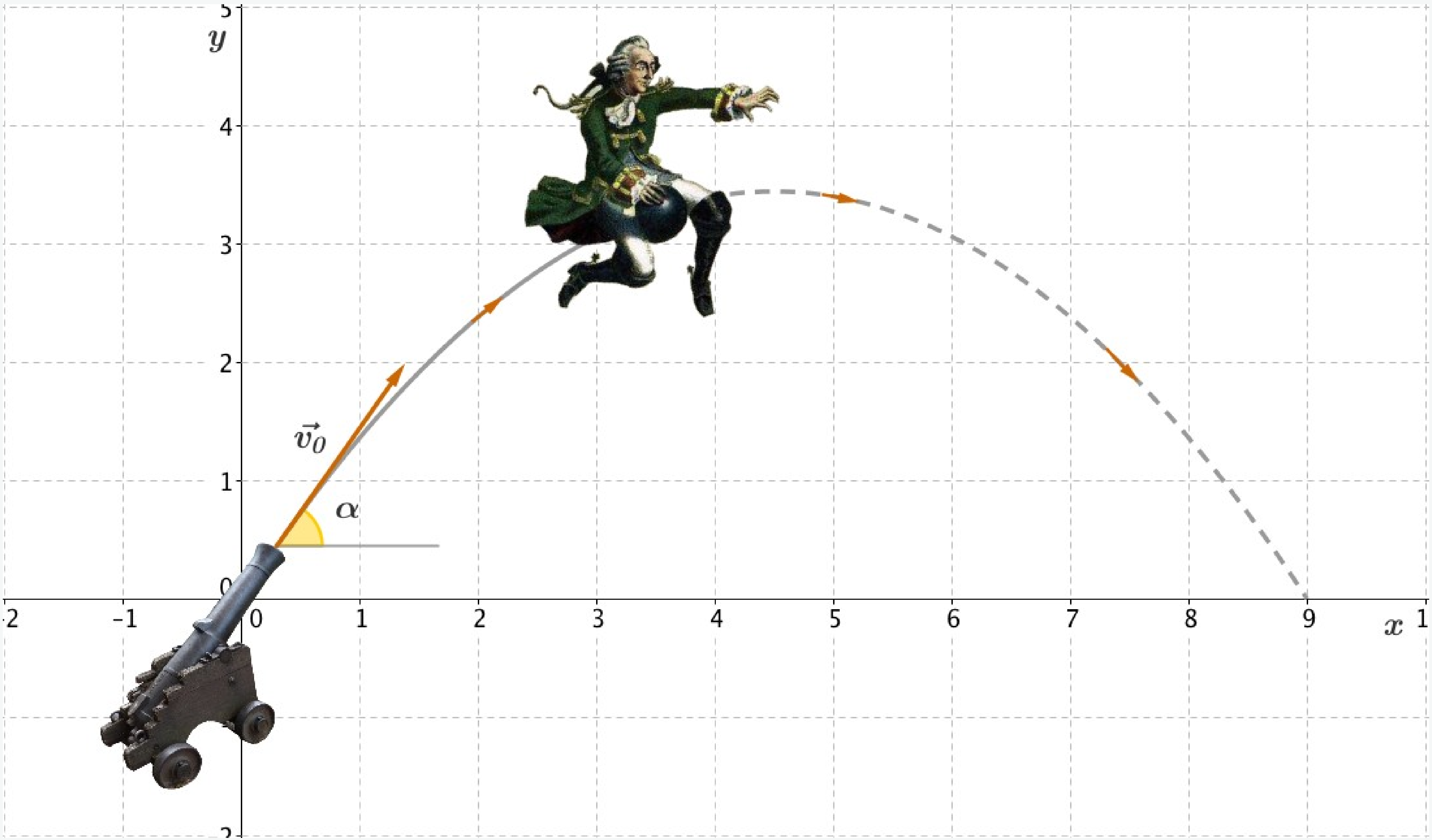
Hieronymus Carl Friedrich Freiherr von Münchhausen (1720 - 1797)

Carl Friedrich Freiherr von Münchhausen war ein deutscher Adliger aus dem Kurfürstentum Braunschweig-Lüneburg. Ihm werden die Geschichten vom Baron Münchhausen zugeschrieben.

So verlangte einmal mein General während einer Schlacht von mir, dass ich eine feindliche Festung auszuspionieren habe. Wie aber sollte ich ungesehen dort hinein gelangen? Nichts leichter als das, dachte ich, und schwang mich auf eine Kanonenkugel, die meine Kameraden gerade auf die Festung abgeschossen hatten.

Gottfried August Bürger

http://www.youtube.com/watch?v=V0e5g13QB5U



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/M%C3%BCnchhausen-AWille.jpg

Abb. 1-2: "Der Ritt auf der Kanonenkugel" als schiefer Wurf

Münchhausens Ritt auf der Kanonenkugel kann man durch einen schiefen Wurf approximieren. So wird mathematisch der Ritt beschrieben: Ein Körper der Masse m wird über dem Boden mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α hoch geworfen. Die Bewegung des Körpers wird von der Gewichtskraft beeinflusst. Die Luftwiderstandskraft wird vernachlässigt.

In x-Richtung bewegt sich der Körper mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha\,, \qquad x(t) = (v_0 \cdot \cos\alpha)\, t$$

In y-Richtung erfolgt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Anfangsgeschwindigkeit in y-Richtung ist $v_0 \sin\alpha$. Da die Fallbeschleunigung den Betrag g hat und nach unten gerichtet ist, in negative y-Richtung, wird für die Beschleunigung in y-Richtung der Wert $-g$ eingesetzt.

$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g\, t\,, \qquad y(t) = (v_0 \cdot \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

Um aus zwei Parametergleichungen eine Gleichung der Form $y = f(x)$ zu bekommen, lösen wir die Gleichung $x = x(t)$ nach t auf und setzen das Ergebnis in die Gleichung $y = y(t)$ ein.

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}, \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

$$y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Wodurch unterscheiden sich diese beiden Darstellungen der ebenen Kurve C?

$$1)\ C: \quad x(t) = (v_0 \cdot \cos\alpha)\, t, \qquad y(t) = (v_0 \cdot \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

$$2)\ C: \quad y = x \tan\alpha - \frac{g\, x^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}$$

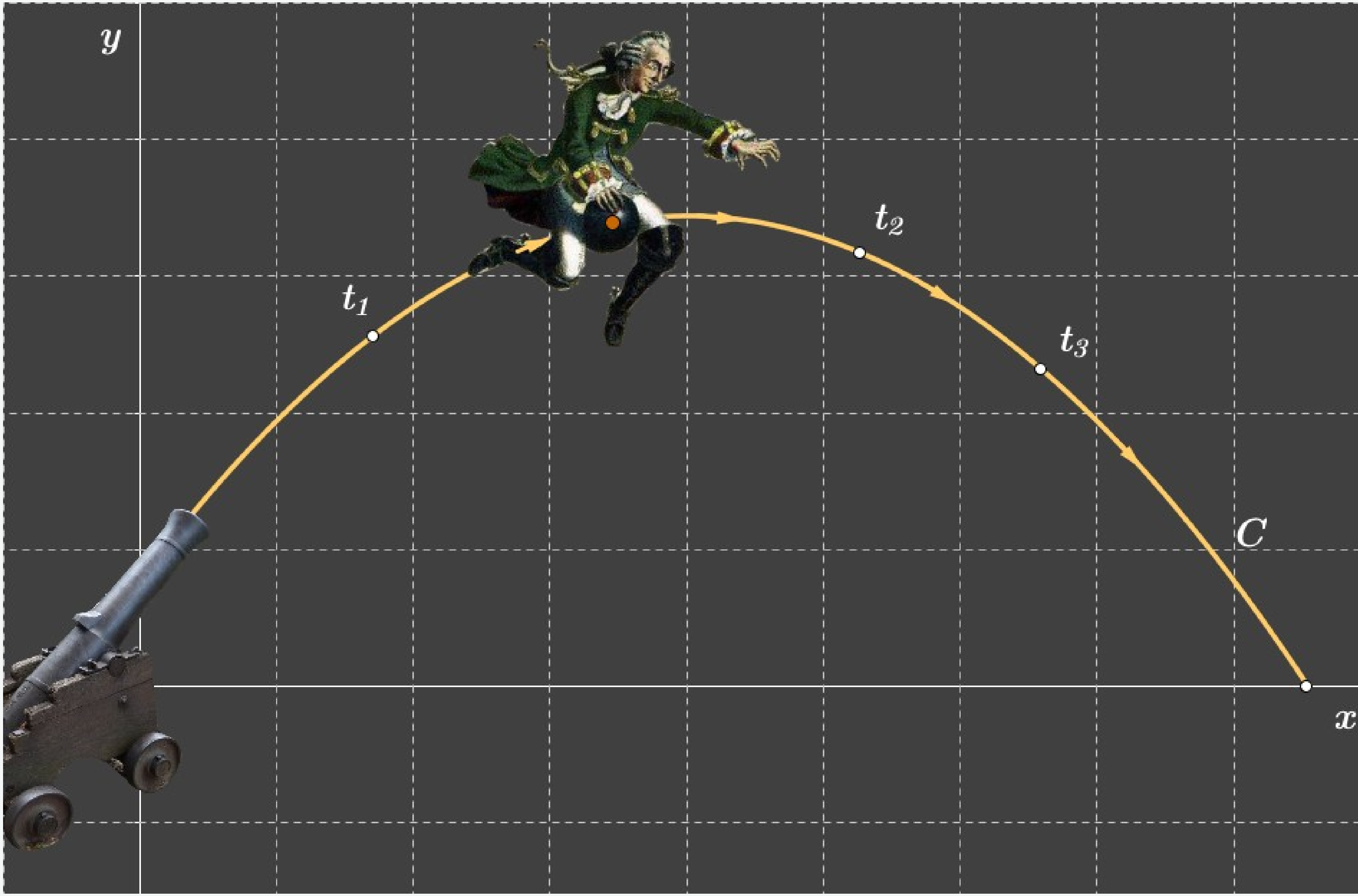


Abb. 1-3: Der schiefer Wurf. Flugpositionen zu verschiedenen Zeiten t. Die Pfeile geben die Richtung der Bewegung (= die Orientierung der Kurve C) an.

$$t_1 < t_2 < t_3$$

$$C: \quad x(t) = (v_0 \cdot \cos\alpha)\, t, \qquad y(t) = (v_0 \cdot \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

In der Parameterdarstellung wird jedem Wert des Parameters t, der für die Zeit steht, eindeutig ein (x, y)-Paar zugeordnet. Das bedeutet, dass wir eindeutig sagen können, an welcher Stelle sich der Körper zu diesem Zeitpunkt befindet.

Die Darstellung $\quad y = x \tan\alpha - \dfrac{g\, x^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}$

sagt uns nichts über den Ort des Körpers zu jedem Zeitpunkt, weil der Parameter ja gar nicht in der Gleichung vorkommt.

In der Parameterdarstellung hat die Kurve eine Orientierung, d.h. eine Richtung, in der die Kurve durchlaufen wird.

Aufgabe 1: Welche Funktionen beschreiben folgende Parametergleichungen

$a)\ x(t) = t, \quad y(t) = a\,t + b$

$b)\ x(t) = t - 2, \quad y(t) = a(t - 2) + b$

$c)\ x(t) = t^3, \quad y(t) = a\,t^3 + b, \qquad t \in \mathbb{R}$

$a, b, t \in \mathbb{R}$

Sind diese Funktionen gleich?

Aufgabe 2: Welche Funktionen beschreiben folgende Parametergleichungen

$a)\ x(t) = t, \quad y(t) = t^2$

$b)\ x(t) = \sqrt{t}, \quad y(t) = t$

$c)\ x(t) = \dfrac{1}{t}, \quad y(t) = \dfrac{1}{t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}$

Stellen Sie, wo möglich, die explizite Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf und zeichnen Sie die entsprechende Kurve und ihre Orientierung. Sind die in *a*), *b*) und *c*) gegebenen Funktionen identisch?

Lösung 1:

Die Parametergleichungen beschreiben die lineare Funktion $y = a\,x + b$.

Lösung 2:

$a)\ x = t, \quad y = t^2, \quad y = x^2, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [0, \infty)$

$b)\ x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad y = x^2, \quad D = [0, \infty), \quad W = [0, \infty)$

$c)\ x = \dfrac{1}{t}, \quad y = \dfrac{1}{t^2}, \quad y = x^2, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad W = (0, \infty)$

Die Funktionen sind unterschiedlich, da sie bei gleicher Funktionsgleichung unterschiedliche Definitionsbereiche haben.

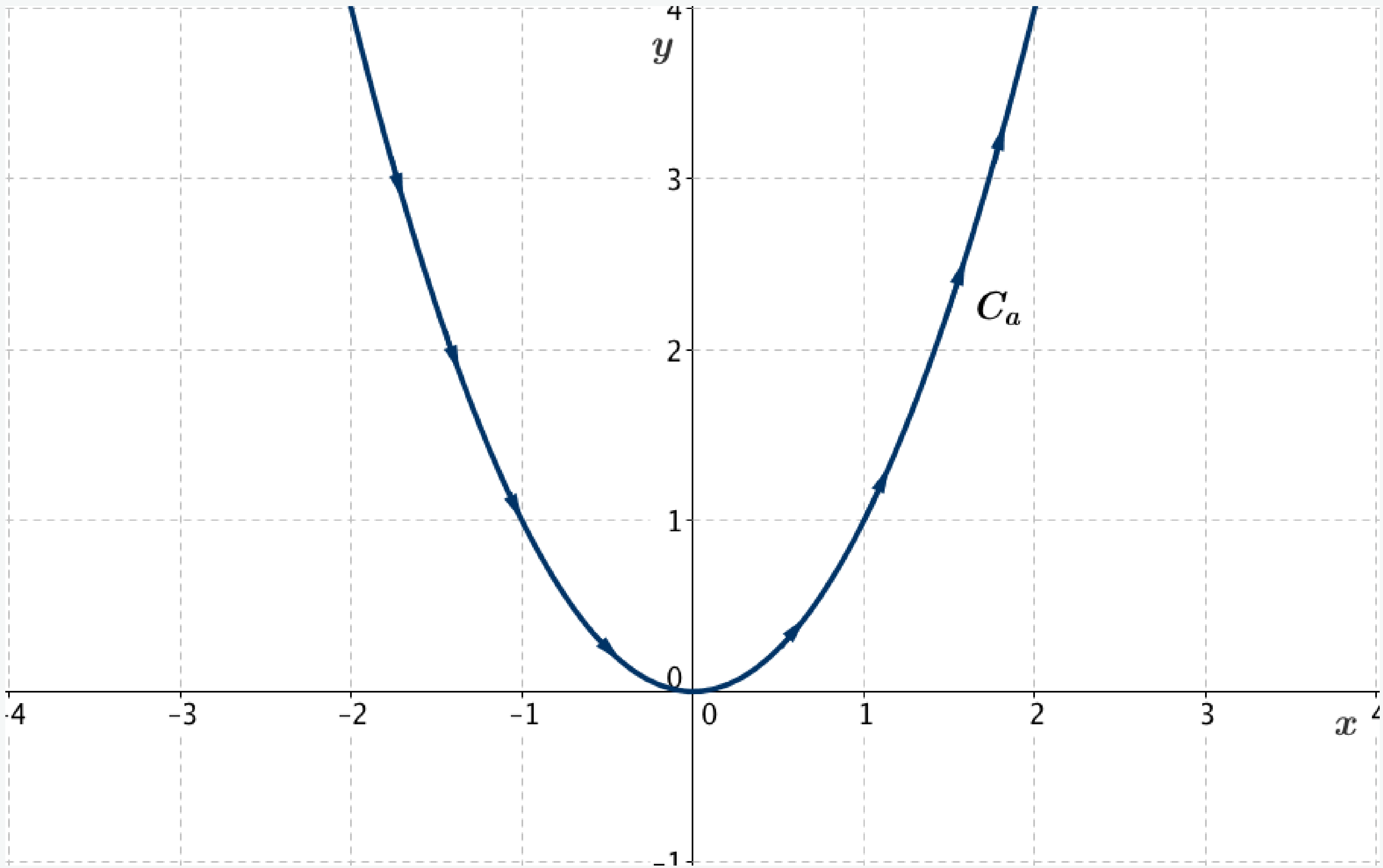


Abb. L-2a: Die Kurve C entspricht den Parametergleichungen x (t) = t und y (t) = t²

$$C_a: \quad x(t) = t, \quad y(t) = t^2$$

$$y = x^2, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [0, \infty)$$

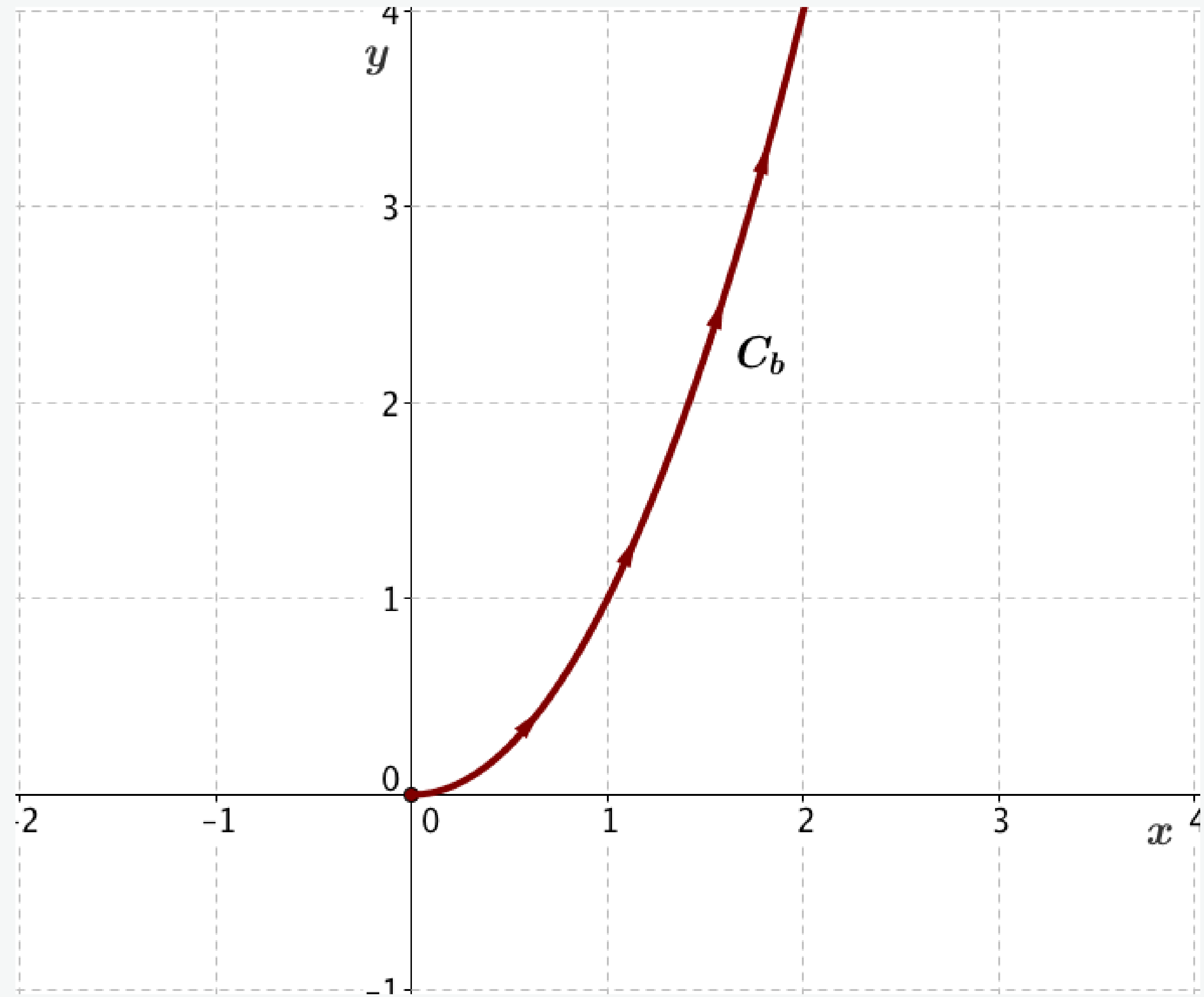


Abb. L-2b: Die Kurve C entspricht den Parametergleichungen x (t) = √t und y (t) = t

$$C_b: \quad x(t) = \sqrt{t}, \quad y(t) = t$$

$$y = x^2, \quad D = [\,0, \infty\,), \quad W = [\,0, \infty\,)$$

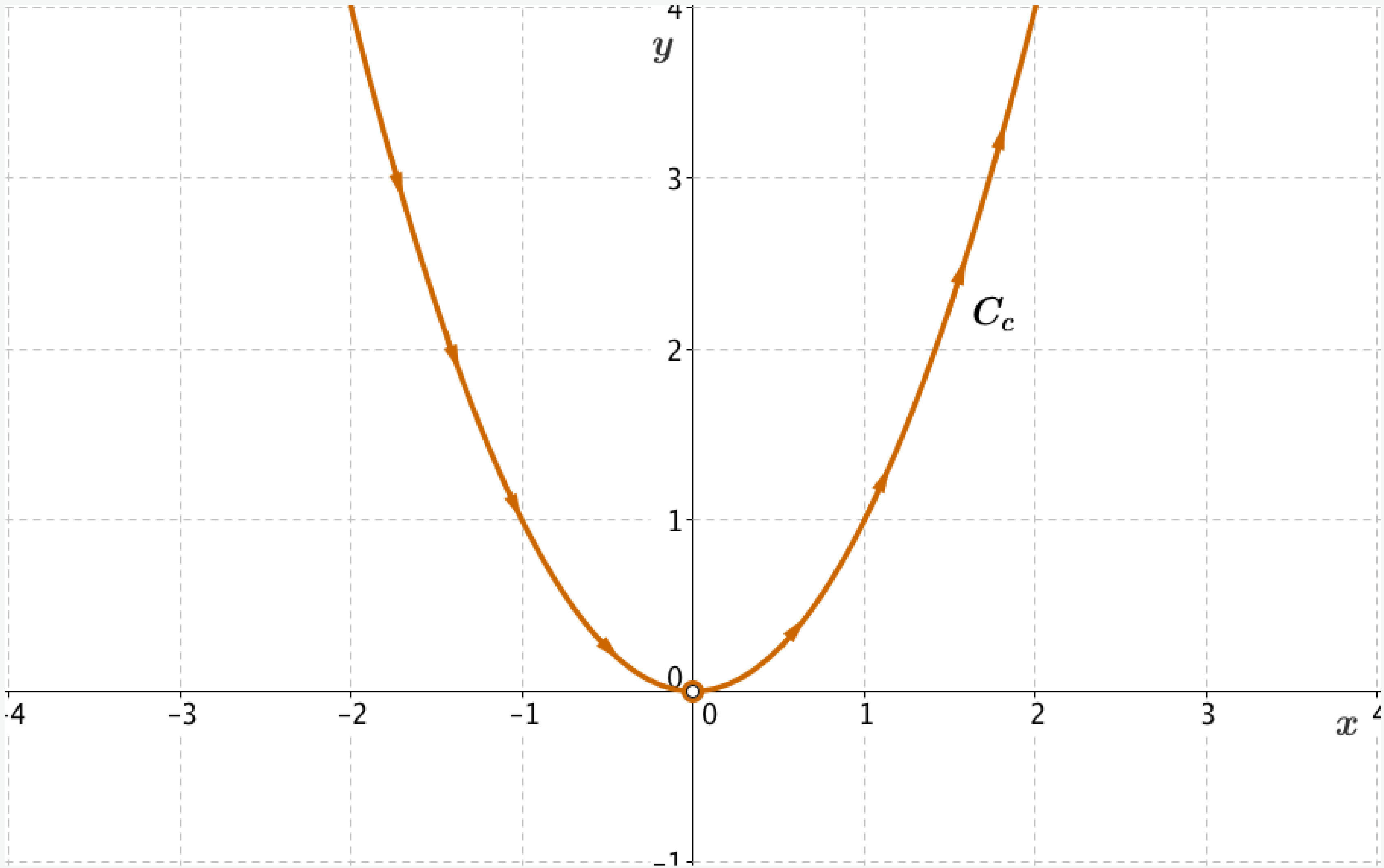


Abb. L-2c: Die Kurve C entspricht den Parametergleichungen x (t) = 1/t und y (t) = 1/t²

$$C_c: \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{1}{t^2}$$

$$y = x^2, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, \quad W = (0, \infty)$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Funktion, die durch folgende Parametergleichungen gegeben ist, und beschreiben Sie ihre Eigenschaften: Definitionsbereich, Wertebereich und Orientierung

$$x = \frac{t}{2} + 1, \quad y = \frac{t^2}{8} - 1, \quad t \in [-2, \infty)$$

$$x = \frac{t}{2} + 1, \qquad y = \frac{t^2}{8} - 1, \qquad t \in [-2, \infty)$$

$$t = 2(x - 1), \qquad y = \frac{4(x-1)^2}{8} - 1 = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$$

$$y = f(x), \qquad D \in [0, \infty), \qquad W \in [-1, \infty)$$

$$t = -2, \qquad x(t) = 0, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}$$

$$t = 0, \qquad x(t) = 1, \qquad y(t) = -1$$

$$t = 2, \qquad x(t) = 2, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}$$

$$t = 4, \qquad x(t) = 3, \qquad y(t) = 1$$

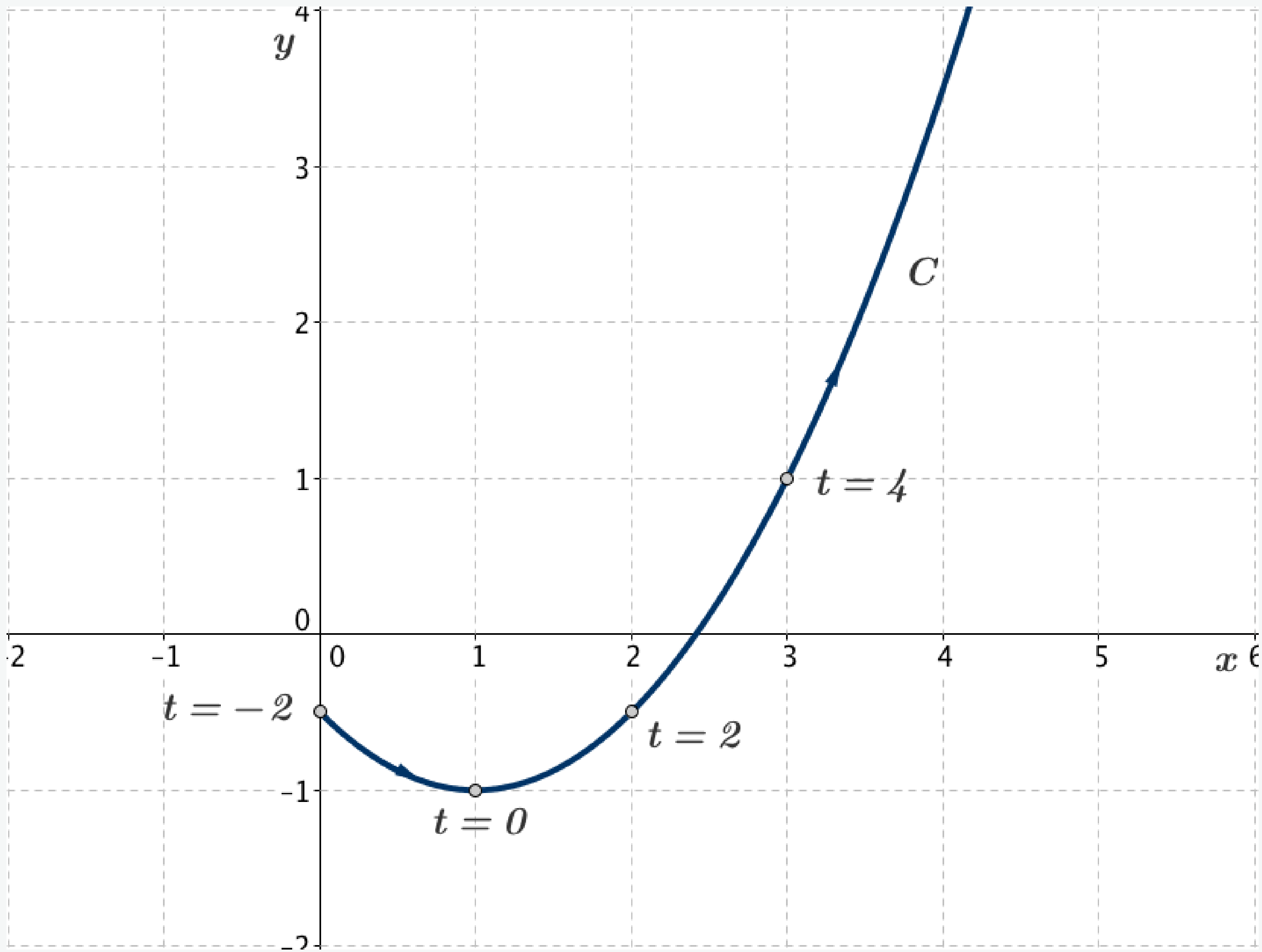


Abb. L3: Die Parabel $y = x^2/2 - x - 1/2$ mit dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ entspricht der Kurve C mit den Parametergleichungen $x = t/2 + 1$ und $y = t^2/8 - 1$, $t \in [-2, \infty)$.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Funktion, die durch folgende Parametergleichungen gegeben ist, und beschreiben Sie ihre Eigenschaften: Definitionsbereich, Wertebereich und Orientierung. Unterscheiden sich die beiden Kurven?

$$a)\ x = \sin t\,, \qquad y = \sin^2 t\,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b)\ x = \sin t\,, \qquad y = \sin^2 t\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

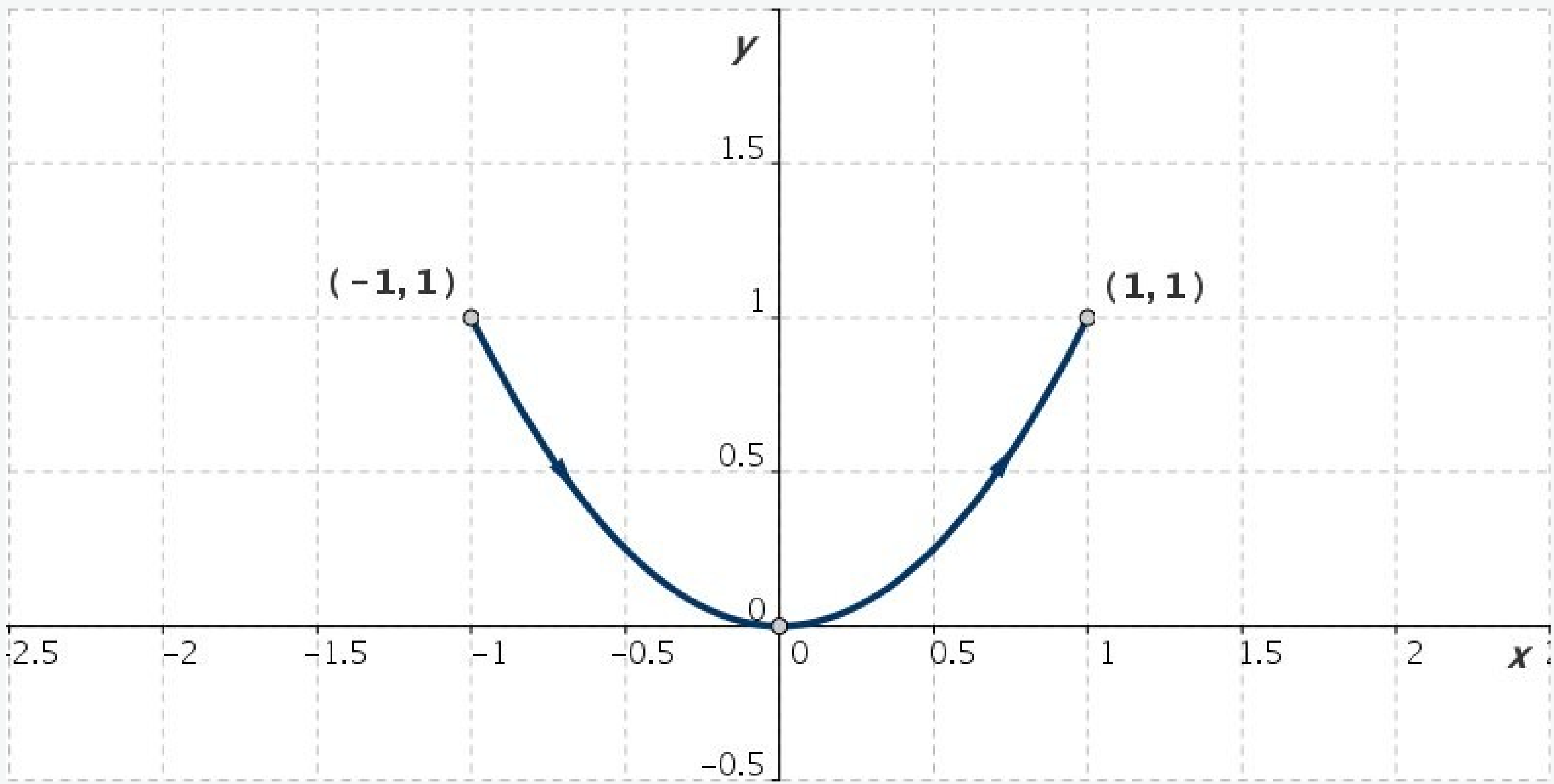


Abb. L-4a: Die Parabel $y = x^2$ mit dem Definitionsbereich $D = [-1, 1]$ entspricht den Parametergleichungen $x = \sin t$ und $y = \sin^2 t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Die Kurve hat eine Richtung und zwar vom Punkt (-1, 1) zum Punkt (1, 1)

$$x = \sin t\,, \qquad y = \sin^2 t\,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right]$$

$$y = x^2\,, \qquad D \in [-1,\ 1]\,, \qquad W \in [0,\ 1]$$

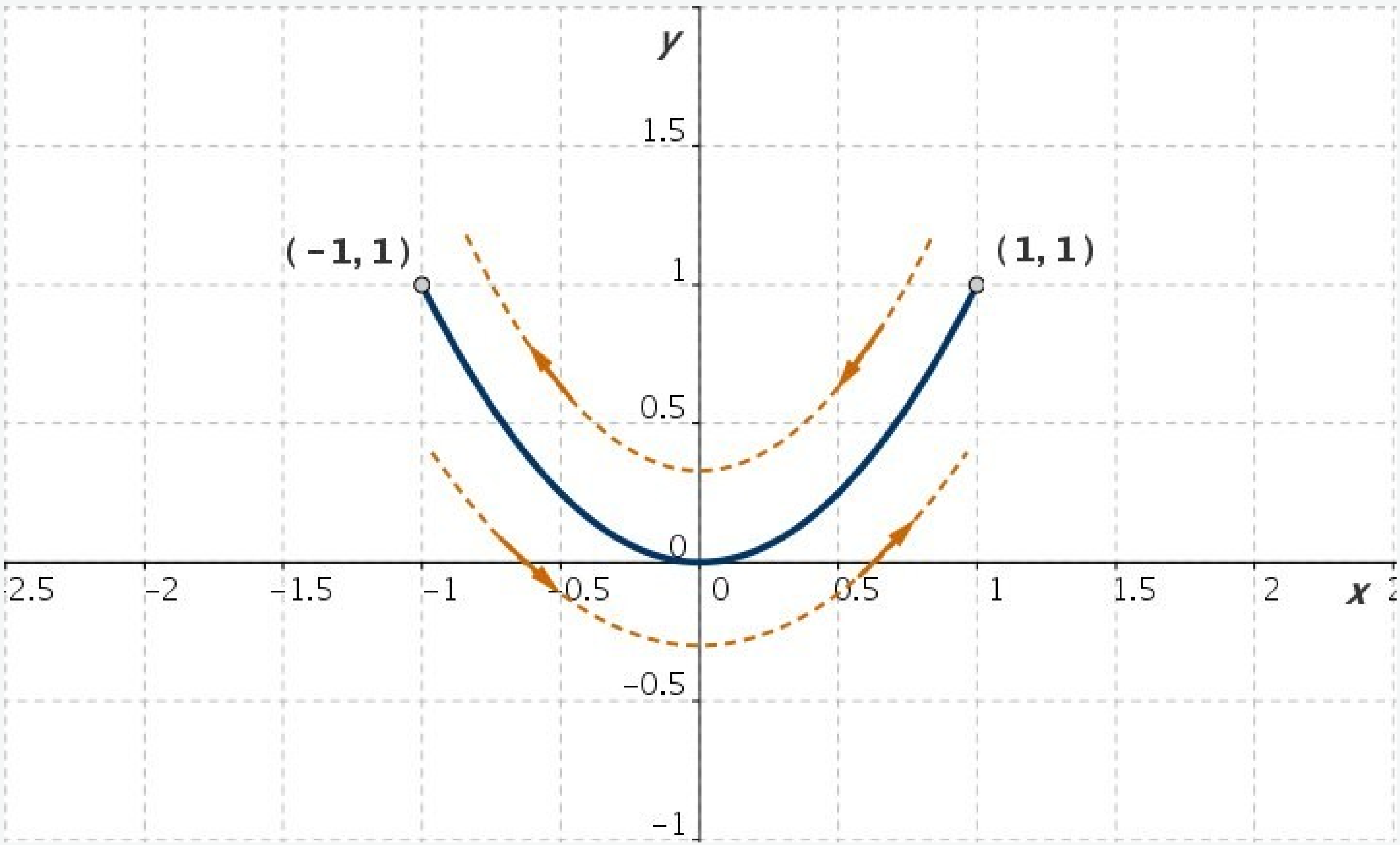


Abb. 3-2: Die Parabel $y = x^2$ mit dem Definitionsbereich $D = [-1, 1]$ entspricht den Parametergleichungen $x = \sin t$ und $y = \sin^2 t$, $t \in (-\infty, \infty)$. Diese Kurve hat keine Orientierung, deswegen unterscheidet sie sich von der Kurve der Aufgabe 4a auf der vorigen Seite

$$x = \sin t\,, \qquad y = \sin^2 t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \qquad D \in [-1,\ 1]\,, \qquad W \in [0,\ 1]$$

$$y = x^2$$

Zeichnen Sie die Kurven, die den folgenden Parametergleichungen entsprechen und ihre Orientierung

$a)\ x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad t \in [0,\ 2\pi]$

$b)\ x = \sin t\,, \quad y = \cos t\,, \quad t \in [0,\ 2\pi]$

$c)\ x = \cos(2t)\,, \quad y = \sin(2t)\,, \quad t \in [0,\ 2\pi]$

Welche der gezeichneten Kurven sind gleich?

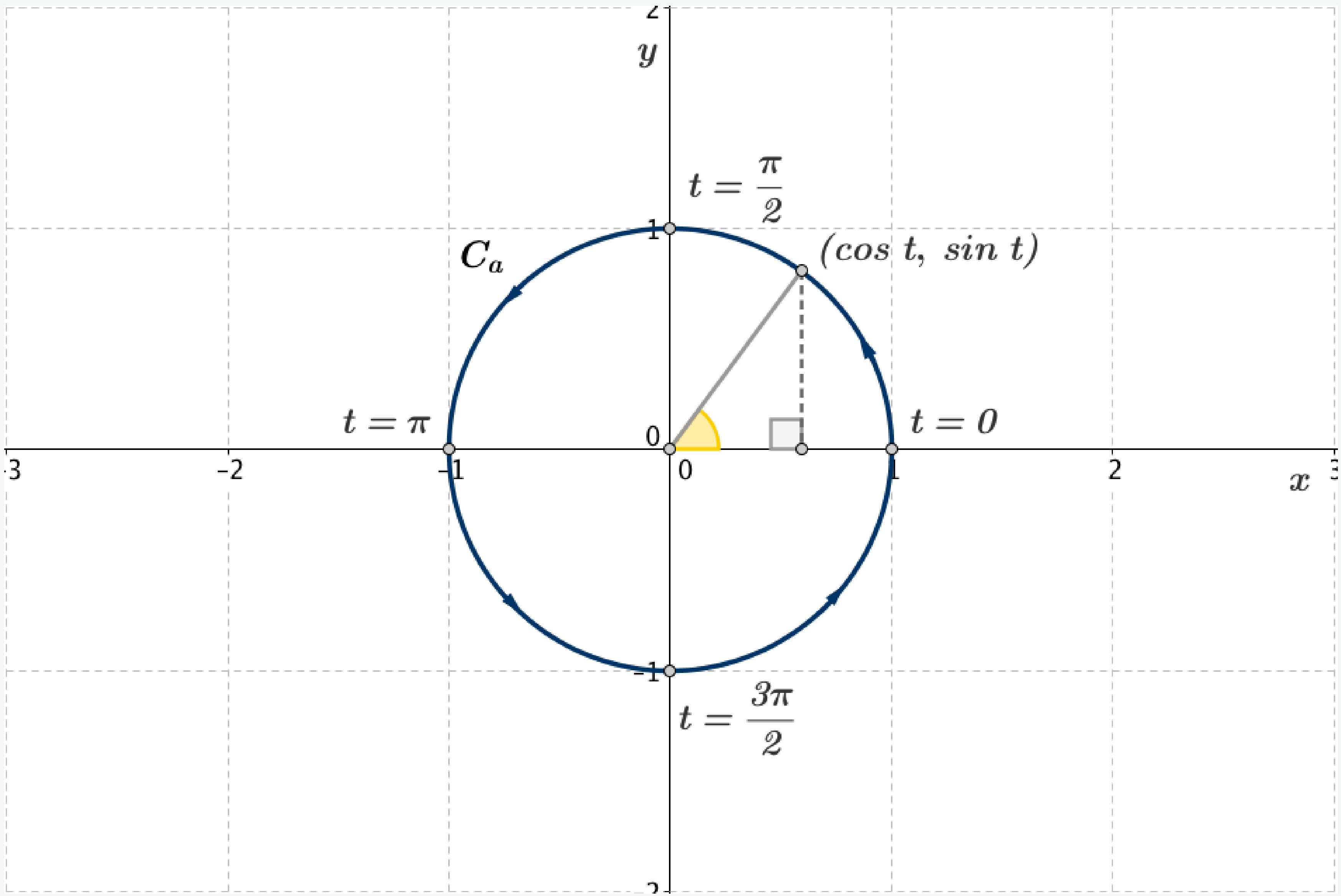


Abb. L-5a: Die Parametergleichungen x (t) = cos t, y (t) = sin t, t ∈ [0, 2π] beschreiben den Einheitskreis. Wenn sich der Parameter von 0 bis 2π ändert, bewegt sich der Punkt auf dem Kreis gegen den Uhrzeigersinn

$$x = \cos t , \qquad y = \sin t , \qquad t \in [0,\ 2\pi]$$

b) $x = \sin t\,, \quad y = \cos t\,, \quad t \in [0,\ 2\pi]$

$$t = 0, \quad x = \sin 0 = 0, \quad y = \cos 0 = 1, \quad P_1 = (0,\ 1)$$

$$t = \frac{\pi}{2}, \quad x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad P_1 = (1,\ 0)$$

$$t = \pi\,, \quad x = \sin \pi = 0, \quad y = \cos \pi = -1, \quad P_1 = (0,\ -1)$$

$$t = \frac{3\pi}{2}, \quad x = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad y = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad P_1 = (-1,\ 0)$$

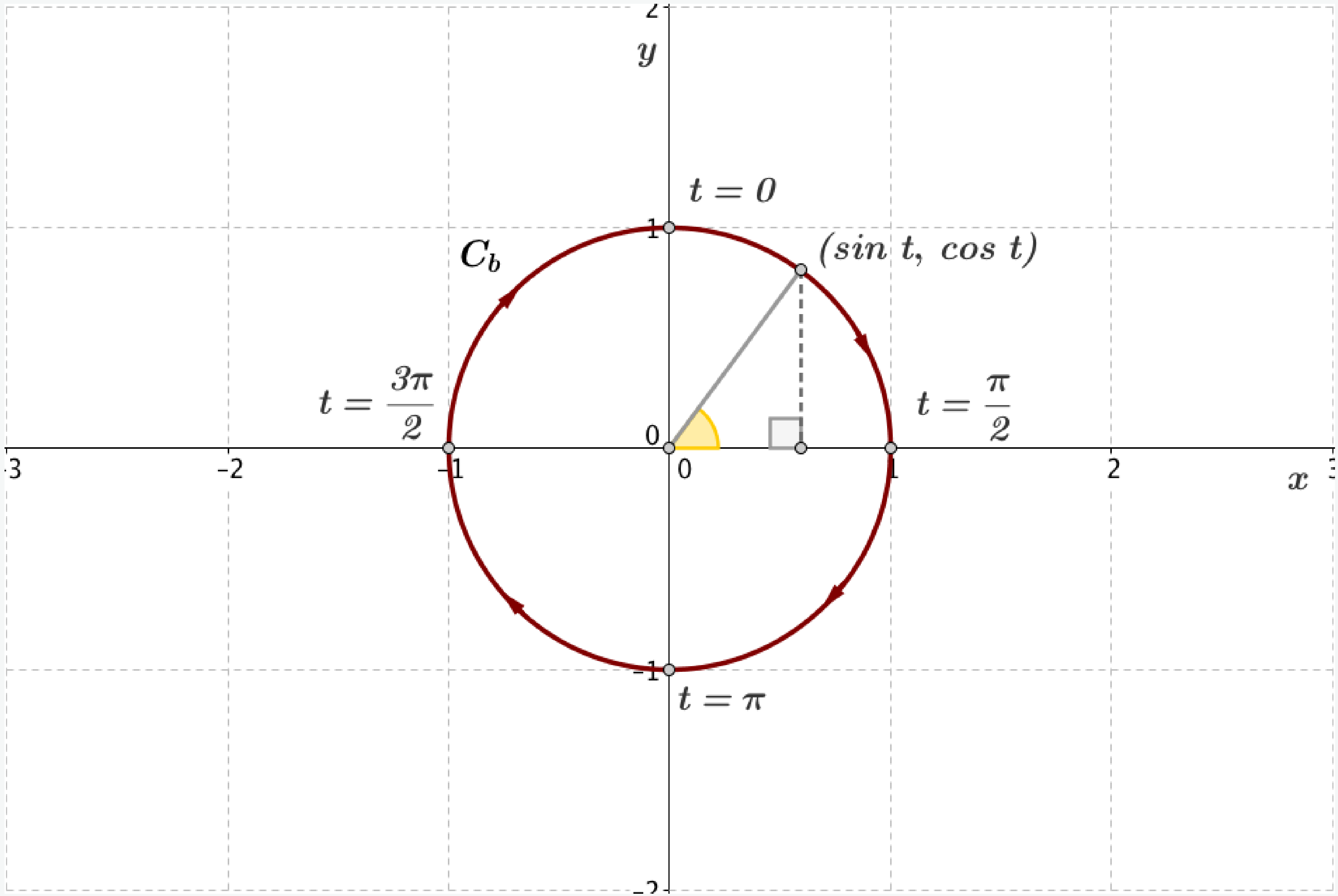


Abb. L-5b: Die Parametergleichungen x (t) = sin t, y (t) = cos t, t ∈ [0, 2π] beschreiben den Einheitskreis. Wenn sich der Parameter von 0 bis 2π ändert, bewegt sich der Punkt auf dem Kreis im Uhrzeigersinn

$$x = \sin t\,, \qquad y = \cos t\,, \qquad t \in [0,\ 2\pi]$$


RITT