Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten für die Funktionen und zeichnen Sie entsprechende Graphen:

$$f_1(x) = \frac{x+2}{x+1}, \qquad f_2(x) = \frac{x^4 - 1}{x}$$

Aufgabe 3:

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2}$$

Der Funktionsterm der unecht gebrochenrationalen Funktion wird in einem ganzrationalen und einen echt gebrochenrationalen Teil zerlegt

$$f_1(x) = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) = 1, \qquad y_A = 1$$

$$f_2(x) = \frac{x^4 - 1}{x} = x^3 - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^3 - \frac{1}{x}\right) = \pm\infty, \qquad y_A = x^3$$

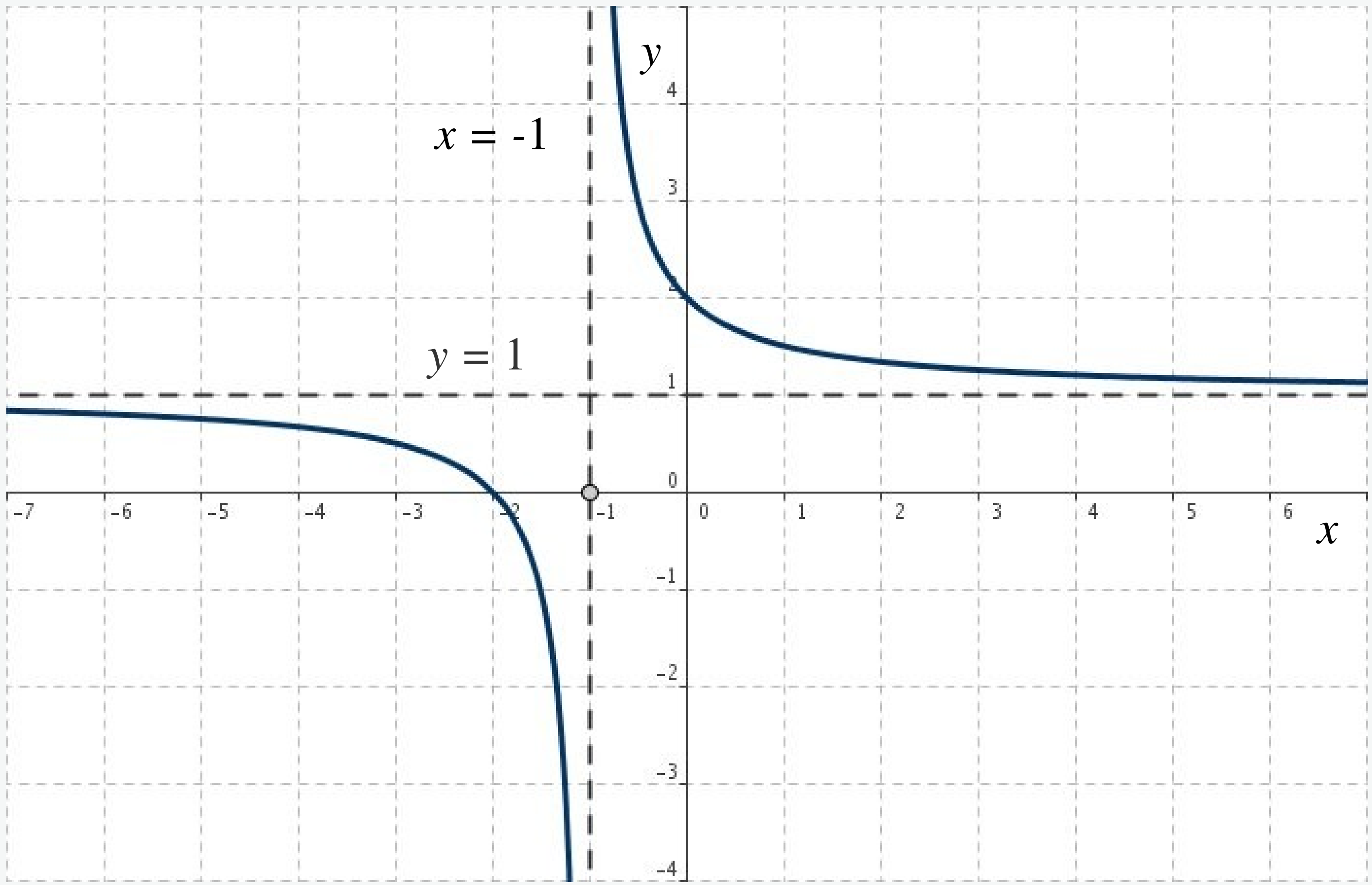

Abb. 7-1: Graphische Darstellung von f (x)

$$f_1(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$$

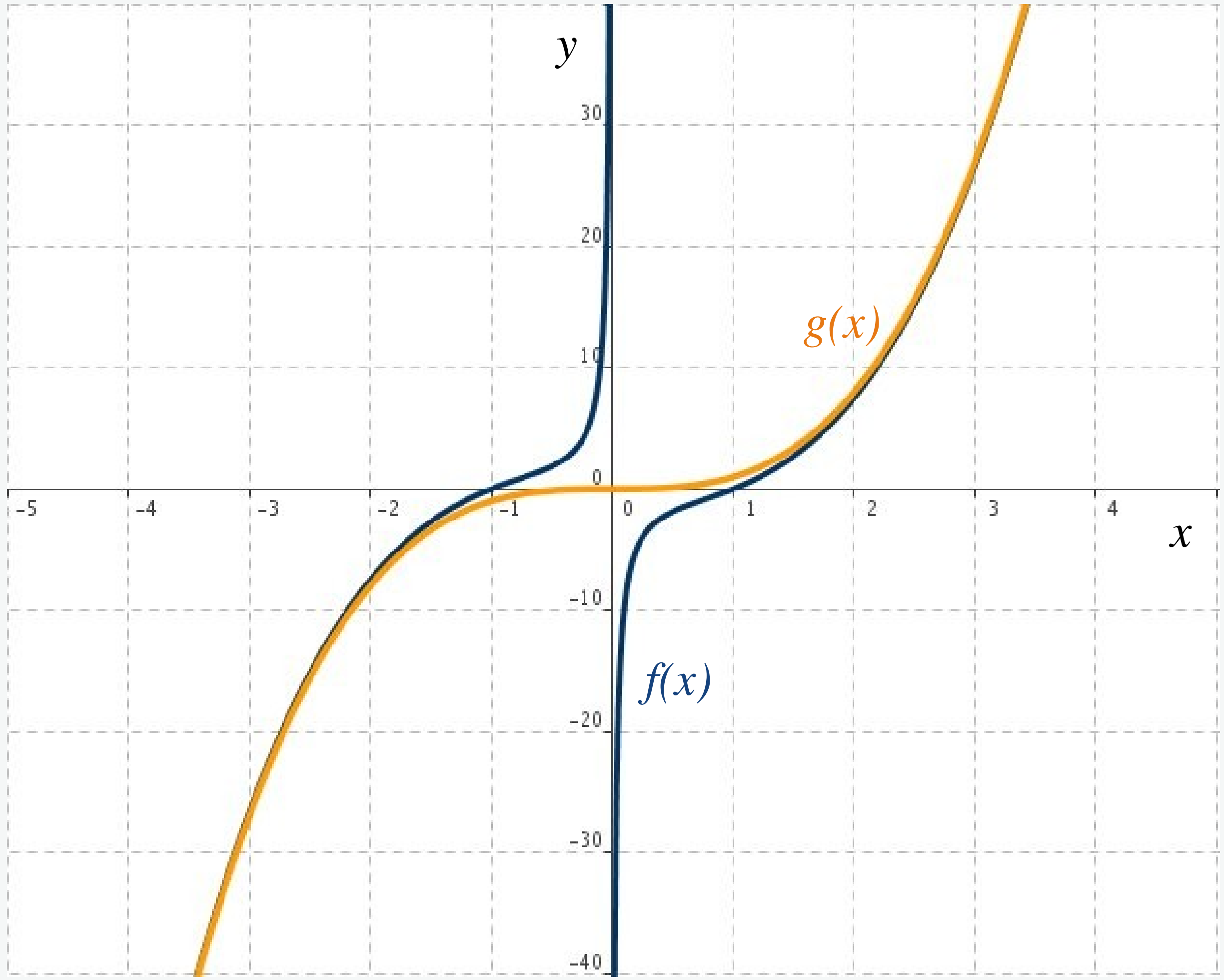

Abb. 7-2: Graphische Darstellung von f (x) und g (x)

$$f\,(x) = \frac{x^4 - 1}{x}\,, \qquad g\,(x) = x^3$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{4x+1}{(x+1)^2}$$

1. Definitionsbereich: $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2. Symmetrie: keine

3. Nullstellen: $Z(x) = x^2 - 2x = x(x-2) = 0, \quad x_{N_1} = 0, \quad x_{N_2} = 2$

4. Asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{4x+1}{(x+1)^2} \right) = 1$

$y_A = 1$ – Gleichung der Asymptote

5. Polstellen: $x = -1$

$$\lim_{x \to -1+\varepsilon} \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \infty, \qquad \lim_{x \to -1-\varepsilon} \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \infty$$

$x = -1$ – Gleichung der senkrechten Asymptote

6. Ableitungen: $f'(x) = \frac{-2 + 4x}{(x+1)^3}, \qquad f''(x) = \frac{-8x + 10}{(x+1)^4}$

7. Extrempunkte: $f\,'(x_E) = 0: \quad x_E = \dfrac{1}{2}, \qquad P_E = \left(\dfrac{1}{2}\,;\, -\,\dfrac{1}{3}\right)$

$$f\,''(x_E) = f\,''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$P_E\left(\frac{1}{2}\,;\, -\,\frac{1}{3}\right) \quad - \text{ Tiefpunkt}$$

8. Wendepunkte: $f\,''(x_W) = 0$

$$f\,''(x) = \frac{-8\,x + 10}{(x+1)^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad -8\,x + 10 = 0$$

$$x_W = \frac{5}{4}, \qquad y_W = -\,\frac{5}{27}$$

$$P_W = \left(\frac{5}{4}\,;\, -\,\frac{5}{27}\right)$$

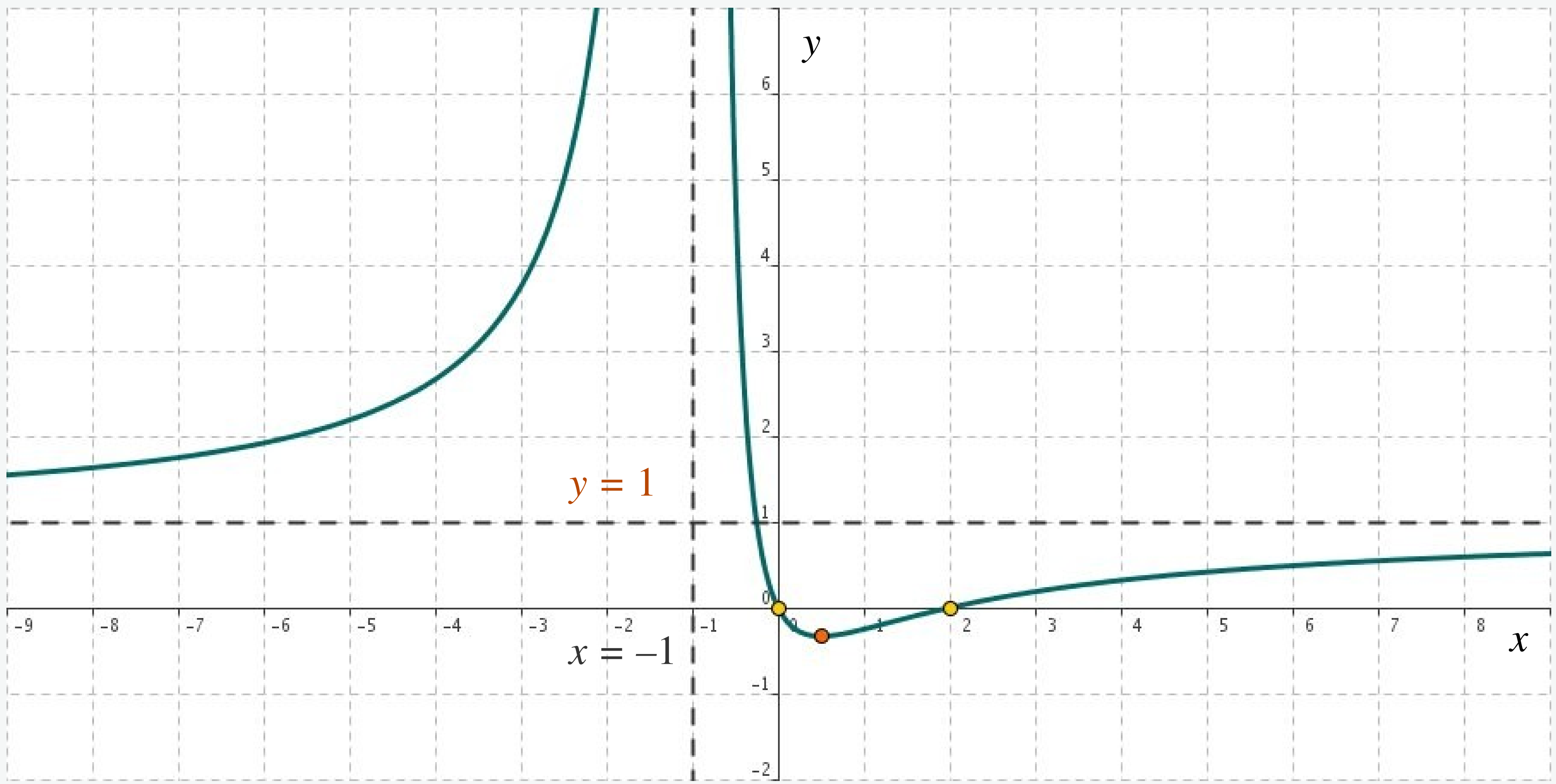

Abb. 8-1: Graphische Darstellung von f (x)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2}$$

Führen Sie für die folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch und stellen Sie die Funktion graphisch dar

$$a)\quad f(x) = x^2 + \frac{8}{x}, \qquad b)\quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 1}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}, \qquad d)\quad f(x) = \frac{8x}{x^2 + 1}$$

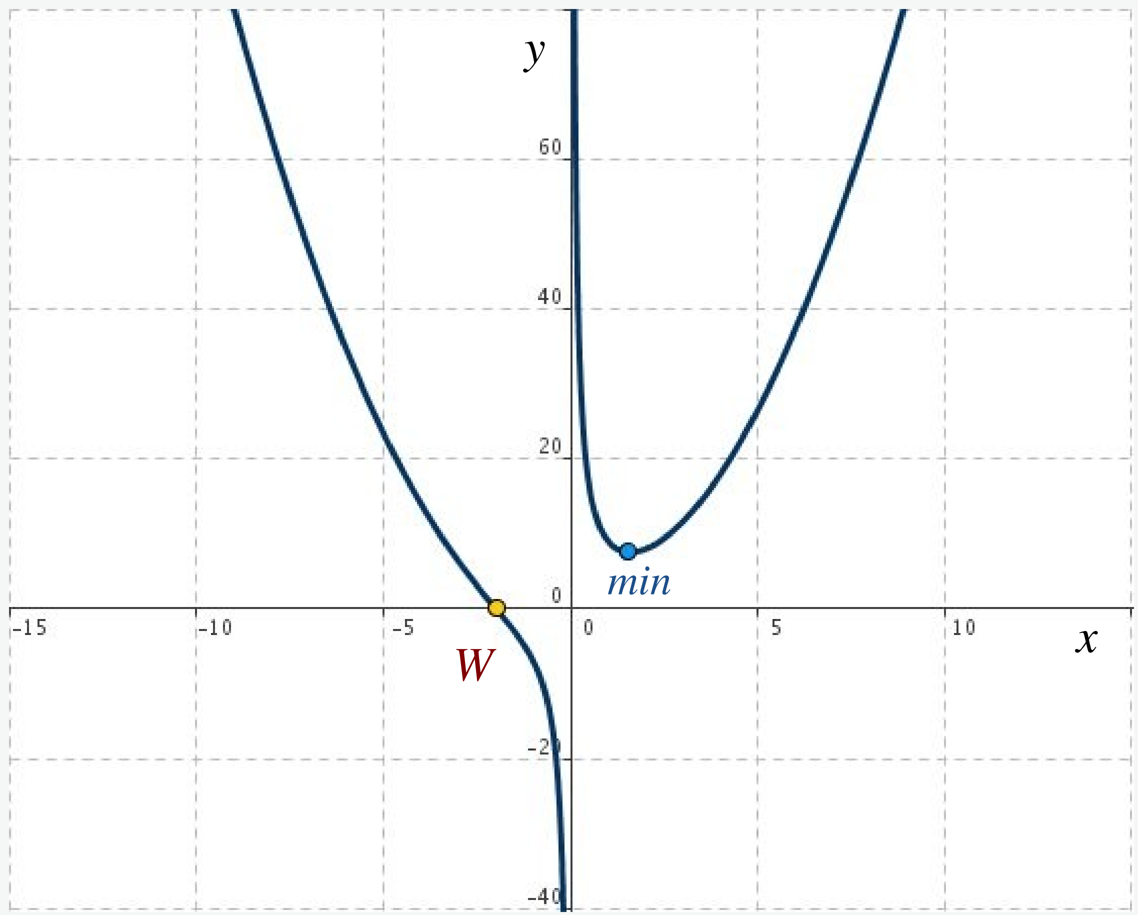

Abb. 9-1: Graphische Darstellung von f (x)

$$f(x) = x^2 + \frac{8}{x}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{Polstelle} \quad x = 0$$

<u>Asymptoten:</u> $x = 0, \quad y = x^2, \quad N(-2,\ 0), \quad P_{min}(\sqrt[3]{4};\ 7.56), \quad W(-2,\ 0)$

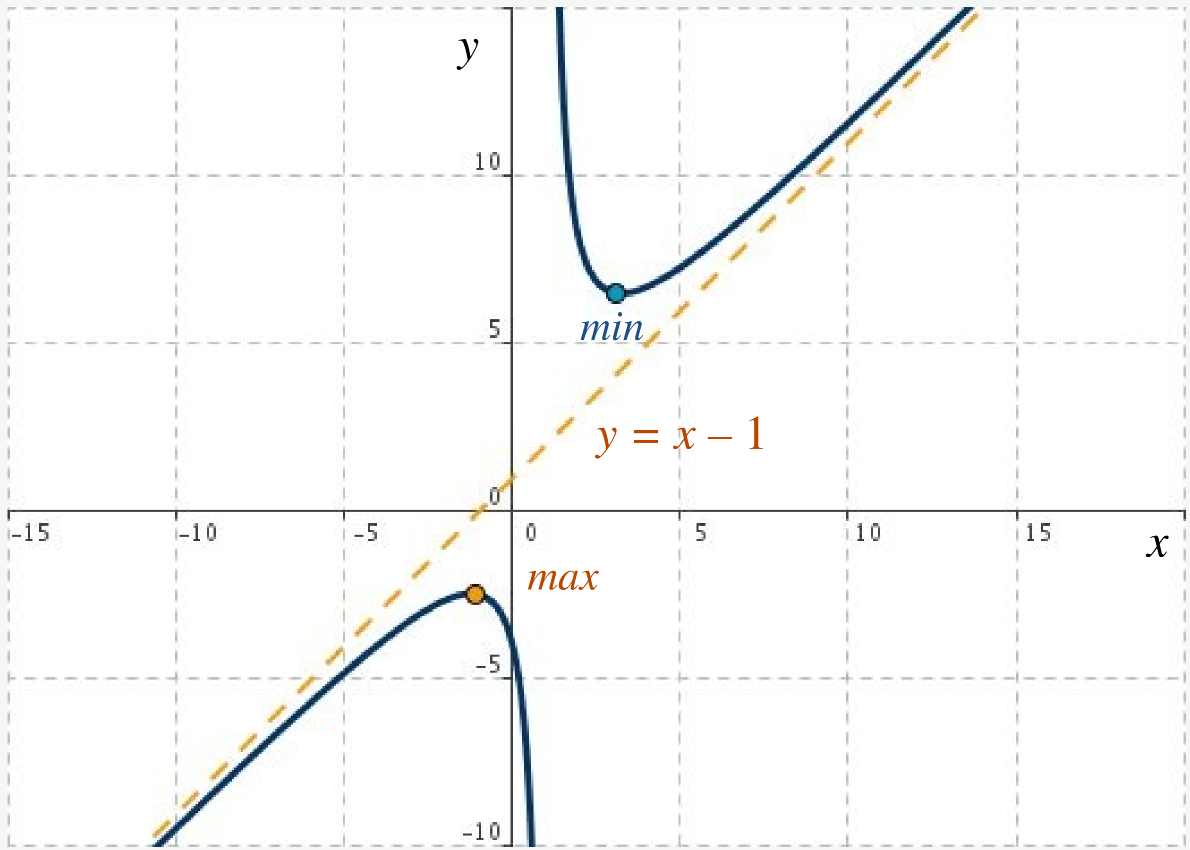

Abb. 9-2: Graphische Darstellung von f (x)

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 1}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad \text{Polstelle } x = 1, \qquad \text{keine Nullstelle}$$

Asymptoten: $x = 1, \quad y = x - 1, \qquad f = x + 1 + \dfrac{5}{x - 1}$

$$P_{min}(3.24;\ 6.42), \qquad P_{max}(-1.24;\ -2.47), \qquad \text{kein Wendepunkt}$$

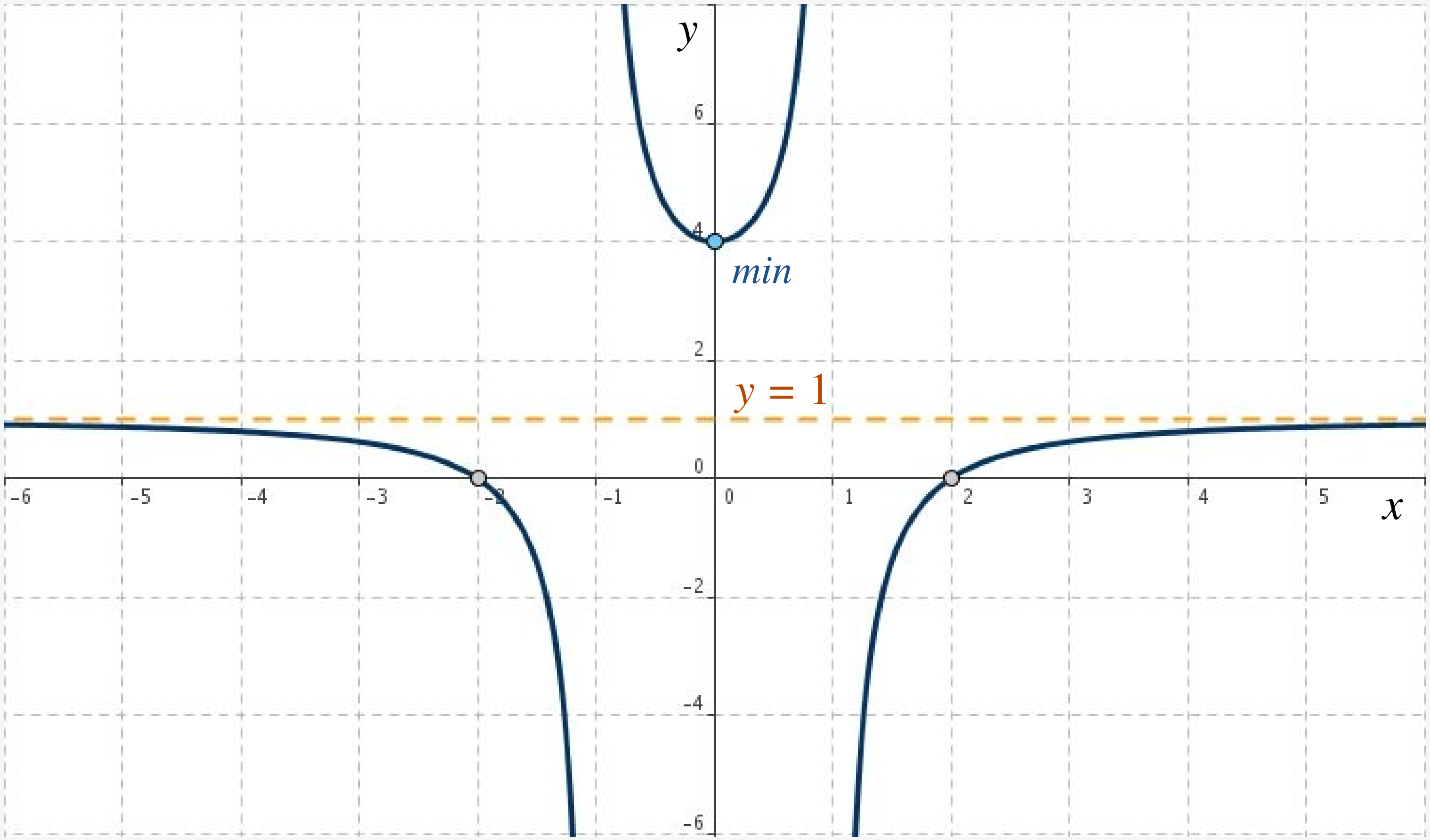

Abb. 9-3: Graphische Darstellung von f (x)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}, \qquad \text{Polstelle} \quad x = 1, \quad x = -1$$

Asymptoten: $y = 1, \quad x = 1, \quad x = -1, \quad f(x) = 1 - \dfrac{3}{x^2 - 1}$

$N_1(2,\ 0), \quad N(-2,\ 0), \quad P_{min}(0,\ 4)$, keine Wendepunkte

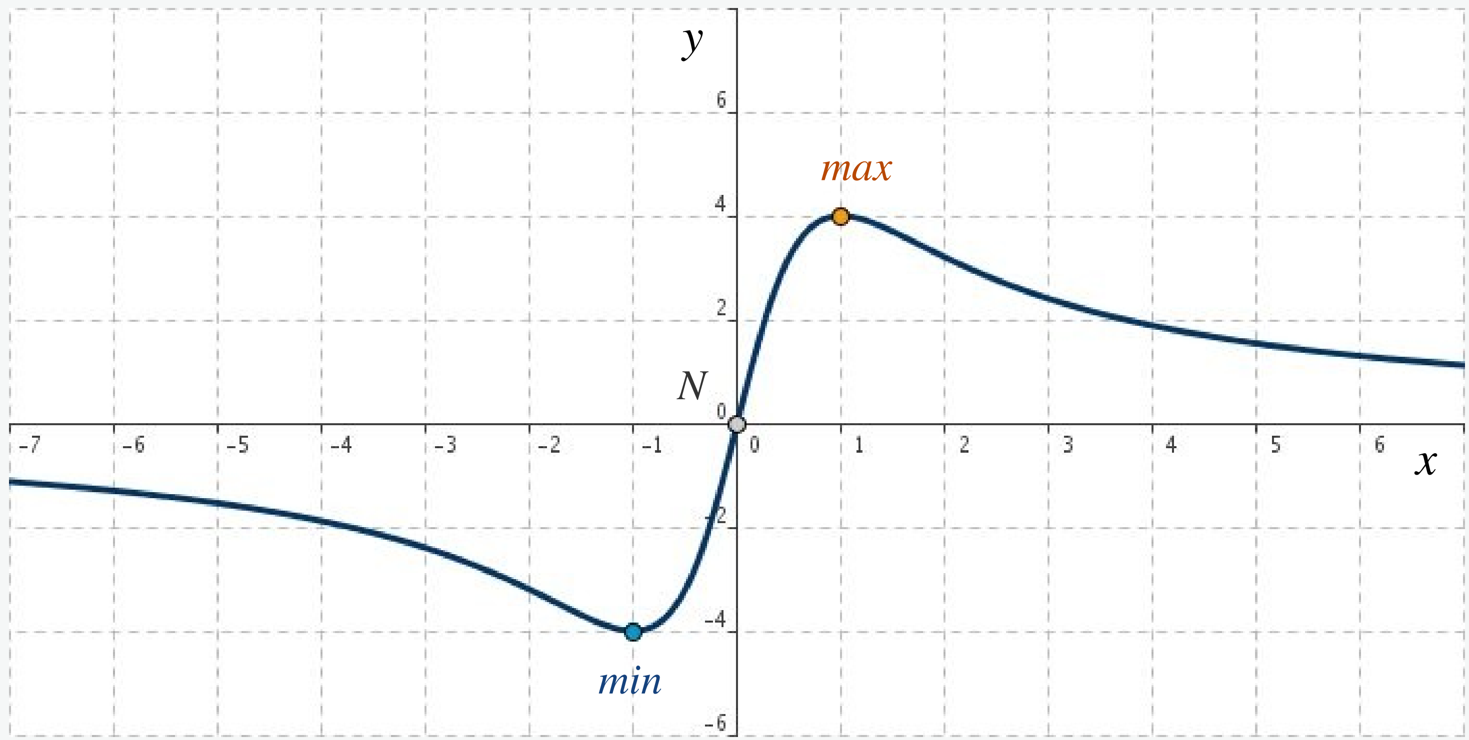

Abb. 9-4: Graphische Darstellung von f (x)

$$f(x) = \frac{8x}{x^2+1}, \qquad D = \mathbb{R}, \qquad \text{keine Unstetigkeitsstellen}$$

Asymptoten: $y = 0, \quad N(0,\ 0), \quad P_{min} = (-1,\ -4), \quad P_{max} = (1,\ 4)$

$$W_1(0,\ 0), \quad W_2(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}), \quad W_3(-\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$$