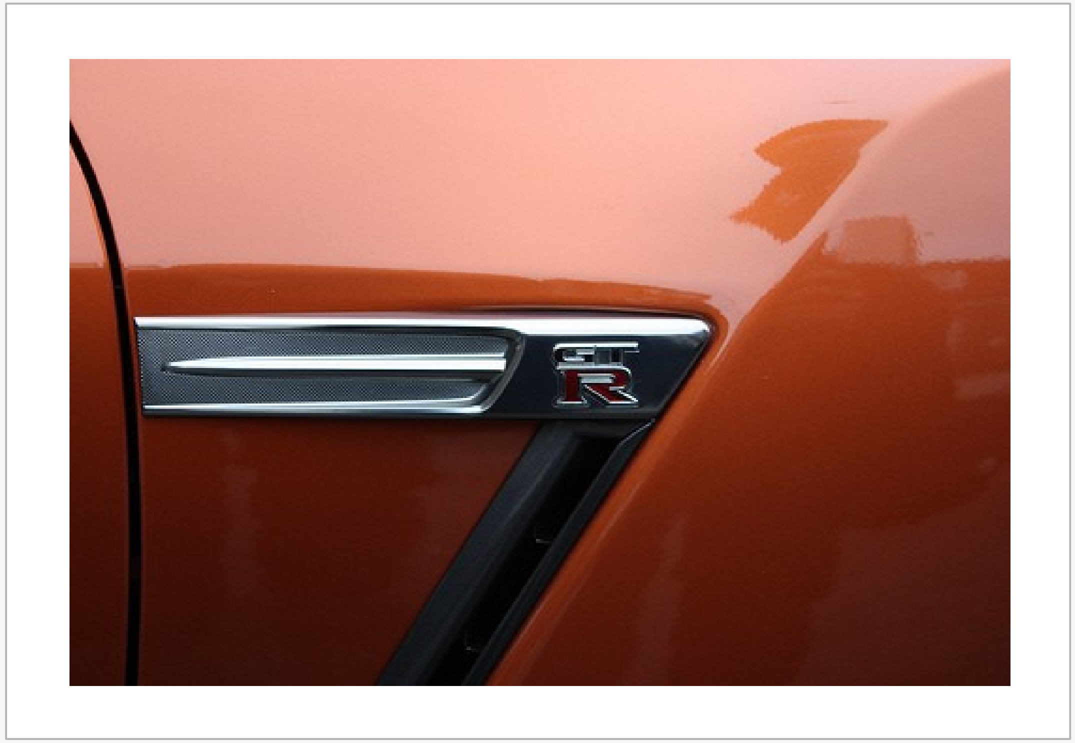

http://www.flickr.com/photos/iainmclauchlan/4162977106/in/pool-carscarscars

Vollständige Diskussion einer gebrochenrationalen Funktion

Allgemeiner Fall:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Ableitungen nach Quotientenregel

Spezielles Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{2 - 2x}{x^3}, \qquad f''(x) = \frac{4x - 6}{x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{24 - 12x}{x^5}$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \mid N(x) = 0 \}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$$

Symmetrieeigenschaften

$f(-x) = f(x)$ – f ist achensymmetrisch zur y-Achse, eine gerade Funktion

$f(-x) = -f(x)$ – f ist punktsymmetrisch zu $P(0, 0)$, eine ungerade Funktion

$$f(-x) = \frac{-2x - 1}{(-x)^2} = \frac{-2x - 1}{x^2} \neq f(x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Es liegt keine Symmetrie vor.

Diskussion einer gebrochenrationalen Funktion

Das Verhalten im Unendlichen

Wir untersuchen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

Für m < n ist $y = 0$ die Gleichung der Asymptote.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

Stetigkeit / Unstetigkeit:

$f(x)$ hat an einer Stelle x eine Polstelle, wenn $N(x) = 0$ und $Z(x) \neq 0$.

$$x_p = 0, \quad N(x_p) = 0, \quad Z(x_p) \neq 0$$

$x_p = 0$ ist Polstelle.

Nullstellen:

Nullstellen sind die Lösung der Gleichung $Z(x) = 0$, wenn $N(x) \neq 0$ ist.

$$\frac{2x - 1}{x^2} = 0, \qquad 2x - 1 = 0, \qquad x_N = \frac{1}{2}$$

$$N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \neq 0$$

$P_N\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$ ist der Schnittpunkt mit der x-Achse

Schnittpunkte mit der y-Achse:

Wir bestimmen $y_s = f(0)$. Dann ist $P(0,\ y_s)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse.

$x = 0$ gehört nicht zum Definitionsbereich von $f(x)$. Das bedeutet: Der Graph von $f(x)$ hat keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Lokale Extremstellen:

a) Es ist die Gleichung $f\,'(x) = 0$ zu lösen, d.h. Zähler von $f\,'$ muss 0 und Nenner von $f\,'$ muss ungleich 0 sein.

b) Ist x_E die Lösung, dann berechnet man $f\,''(x_E)$

c) Entscheidung:

$f\,''(x_E) < 0$ – x_E ist Maximumstelle.

$f\,''(x_E) > 0$ – x_E ist Minimumstelle.

$f\,''(x_E) = 0$

Entscheidung über VorZeichenWechsel-Kriterium (VZW) oder höhere Ableitungen oder Monotonieverhalten von f.

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2}, \qquad f'(x) = \frac{2 - 2x}{x^3}$$

$a)$ $\dfrac{2 - 2x}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 2x = 0, \qquad x_E = 1$

$b)$ $f''(1) = -2$

$c)$ $f''(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 1$ – Maximumstelle

$P_E(1,\ 1)$ – Maximumpunkt

Wendepunkte:

a) Es ist die Gleichung $f''(x) = 0$ zu lösen (Zähler $= 0$, Nenner $\neq 0$).

b) Ist x_W die Lösung, dann berechnet man $f'''(x_W)$

c) Entscheidung:

$f'''(x_W) \neq 0$ – x_W ist Wendestelle.

$f'''(x_E) = 0$ – Entscheidung über VZW-Kriterium oder höhere Ableitungen oder Monotonieverhalten von f'.

$$\frac{4x - 6}{x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 6\,, \qquad x_W = \frac{3}{2}$$

$$f'''\left(\frac{3}{2}\right) = 0.79 \neq 0$$

$$P_W\left(\frac{3}{2}\,;\ \frac{8}{9}\right) \ \text{– ist Wendepunkt}$$

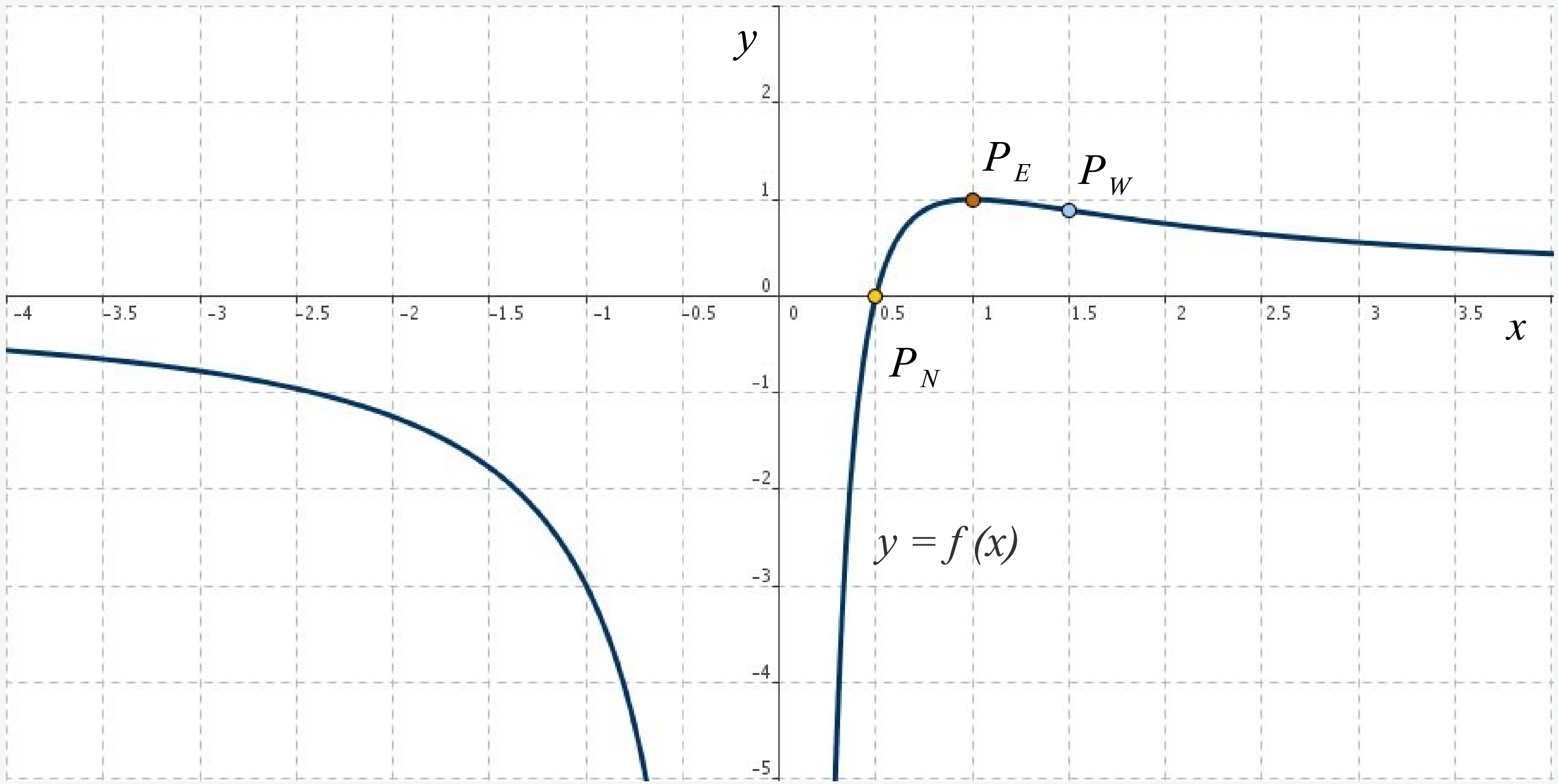

Abb. 5-1: Unecht gebrochenrationale Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$$

Diskutieren Sie folgende Funktionen

$$a)\quad f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$b)\quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8}$$

$$d)\quad f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$e)\quad f(x) = \frac{x + 1}{x - 3}$$