http://www.flickr.com/photos/dwhuntley/1356367384/

Kurvendiskussion

In der Regel sollte die Kurvendiskussion einer Funktion bzw. Ihres Graphen nach der folgenden Schrittfolge durchgeführt werden:

- Bestimmen des größtmöglichen Definitionsbereiches und gegebenenfalls des Wertebereiches
- Untersuchen auf Stetigkeit bzw. Unstetigkeit und Angabe eventueller Polstellen
- Untersuchen auf Symmetrieeigenschaften
- Untersuchen des Verhaltens im Unendlichen (Ermitteln der Asymptoten)
- Bestimmen der Nullstellen

Kurvendiskussion: Checkliste

- Ermitteln der Schnittpunkte mit der y-Achse
- Untersuchen auf lokale Extrempunkte
- Untersuchen auf Wendepunkte, ggf. auch Ermitteln der Wendetangenten
- Zeichnen des Graphen

Welche konkreten Überlegungen bei der Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen notwendig sind, soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden.

Allgemeiner Fall:

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

Ableitungen:

$$f'(x) = n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + \ldots + a_1$$

$$f''(x) = n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \ldots$$

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f'''(x) = 24x$$

- Bestimmen des größtmöglichen Definitionsbereiches und gegebenenfalls des Wertebereiches

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \qquad D = \mathbb{R}$$

- Untersuchen auf Stetigkeit bzw. Unstetigkeit und Angabe eventueller Polstellen

Ganzrationale Funktionen sind im gesamten Definitionsbereich stetig.

Eine Funktion $f(x)$ ist im Intervall [a; b] stetig, wenn man den dazugehörigen Graphen von einem Intervallpunkt bis zum anderen zeichnen kann, ohne den Stift dabei absetzen zu müssen.

oder:

Eine Funktion $f(x)$ ist im Intervall [a; b] **stetig**, wenn sich die Punkte des Graphen der Funktion $f(x)$ innerhalb eines Intervalls [a; b] nahtlos aneinanderfügen, ohne dass sich irgendwelche Sprünge ergeben.

Symmetrieeigenschaften

$f(-x) = f(x)$ – f ist achensymmetrisch zur y-Achse, eine gerade Funktion

$f(-x) = -f(x)$ – f ist punktsymmetrisch zu $P(0, 0)$, eine ungerade Funktion

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$$

f ist eine gerade Funktion. Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse.

Das Verhalten im Unendlichen

Wir untersuchen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = +\infty$$

Nullstellen

Wir ermitteln die Lösungen der Gleichung $f(x_0) = 0$

Die Schnittpunkte mit der *x*- Achse sind dann $P(x_0, 0)$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 2u + 1 = 0, \quad u = x^2$$

$$u_{1,2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

Nullstellen: $x_{N_1} = 1, \quad x_{N_2} = -1$

Schnittpunkte mit der *x*-Achse sind: $P_{N_1}(1, 0), \quad P_{N_2}(-1, 0)$

Schnittpunkte mit der *y*-Achse:

Wir bestimmen $y_s = f(0)$. Dann ist $P(0, y_s)$ der Schnittpunkt mit der *y*-Achse.

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

Schnittpunkte mit der *y*-Achse: $P_3(0, 1)$

Lokale Extremstellen:

a) Es ist die Gleichung $f\,'(x) = 0$ zu lösen

b) Ist x_E die Lösung, dann berechnet man $f\,''(x_E)$

c) Entscheidung:

$f\,''(x_E) < 0$ – x_E ist Maximumstelle.

$f\,''(x_E) > 0$ – x_E ist Minimumstelle.

$f\,''(x_E) = 0$ – Entscheidung über VorZeichenWechsel-Kriterium (VZW) oder höhere Ableitungen oder Monotonieverhalten von f.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 : \quad 4x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x_{E_1} = 0, \quad x_{E_2} = 1, \quad x_{E_3} = -1$$

$f''(0) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E_1} = 0$ – ist Maximumstelle.

$f''(1) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E_2} = 1$ – ist Minimumstelle,

wegen Symmetrie auch $x_{E_3} = -1$

$$P_{E_2} = (-1,\ 0), \quad P_{E_3} = (-1,\ 0)$$

Wendepunkte:

a) Es ist die Gleichung $f''(x) = 0$ zu lösen

b) Ist x_W die Lösung, dann berechnet man $f''(x_W)$

c) Entscheidung:

$f'''(x_W) \neq 0$ – x_W ist Wendestelle.

$f'''(x_E) = 0$ – Entscheidung über VZW-Kriterium oder höhere Ableitungen oder Monotonieverhalten von f'.

$$12\,x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_{W_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_{W_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f''(x) = 12\,x^2 - 4\,, \qquad f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 8\sqrt{3} \neq 0$$

x_{W_1}, x_{W_2} – sind Wendestellen (symmetrische Funktion)

$$P_{W_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right), \qquad P_{W_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right) \quad \text{– sind Wendepunkte}$$

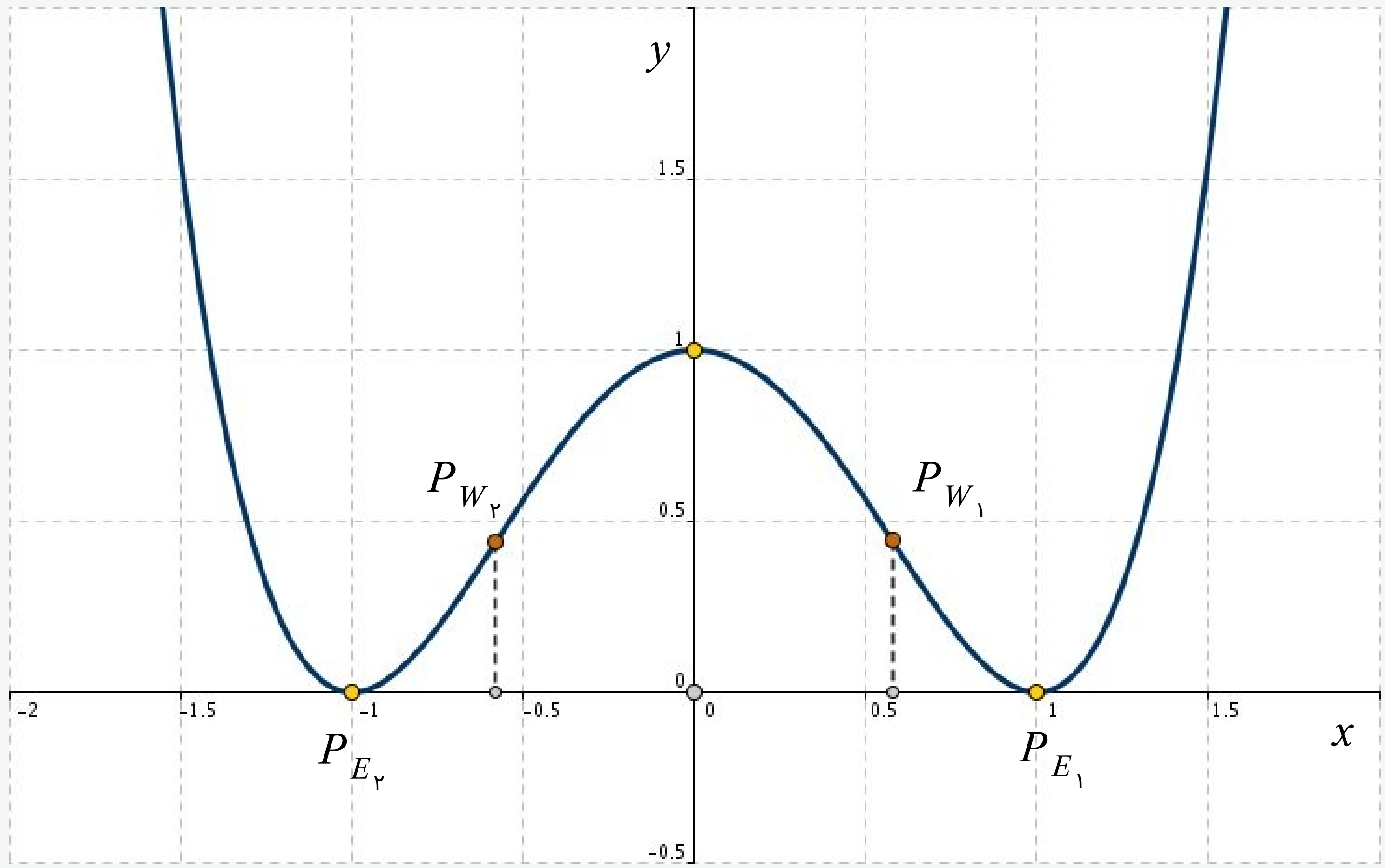

Abb. 1: Graphische Darstellung der Funktion $y = f(x)$