Notwendige und hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen:

Die Funktion f sei in ihrem Definitionsbereich D n-mal differenzierbar. Gilt für $x_E \in D$ und n gerade, $n \geq 2$

$$f\,'(x_E) = f\,''(x_E) = f\,'''(x_E) = \ldots = f^{(n-1)}(x_E) = 0$$

$$f^{(n)}(x_E) \neq 0$$

so hat die Funktion f an dieser Stelle ein *lokales Extremum,* und zwar

$f^{(n)}(x_E) > 0$ – ein lokales Minimum

$f^{(n)}(x_E) < 0$ – ein lokales Maximum

$$f(x) = x^4, \qquad f\,'''(x) = 24\,x\,, \qquad f\,'''(0) = 0$$

$f^{(4)}(x) = 24 > 0$ – lokale Minimumstelle

Extrema: Beispiel 1

Für die Funktion $f(x)$ sollen die Graphen von f, f' und f'' in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Davon ausgehend ist die Funktion f bezüglich lokaler Extremstellen zu diskutieren

$$f(x) = \frac{1}{3} x^3 - x^2 - 3x + 2$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$f''(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x_{E_1} = -1, \quad x_{E_1} = 3$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2 = 0, \quad x_S = 1, \quad S(x_S, f'(x_S)) = (1, -4)$$

$S(1, -4)$ – Scheitelpunkt der Parabel

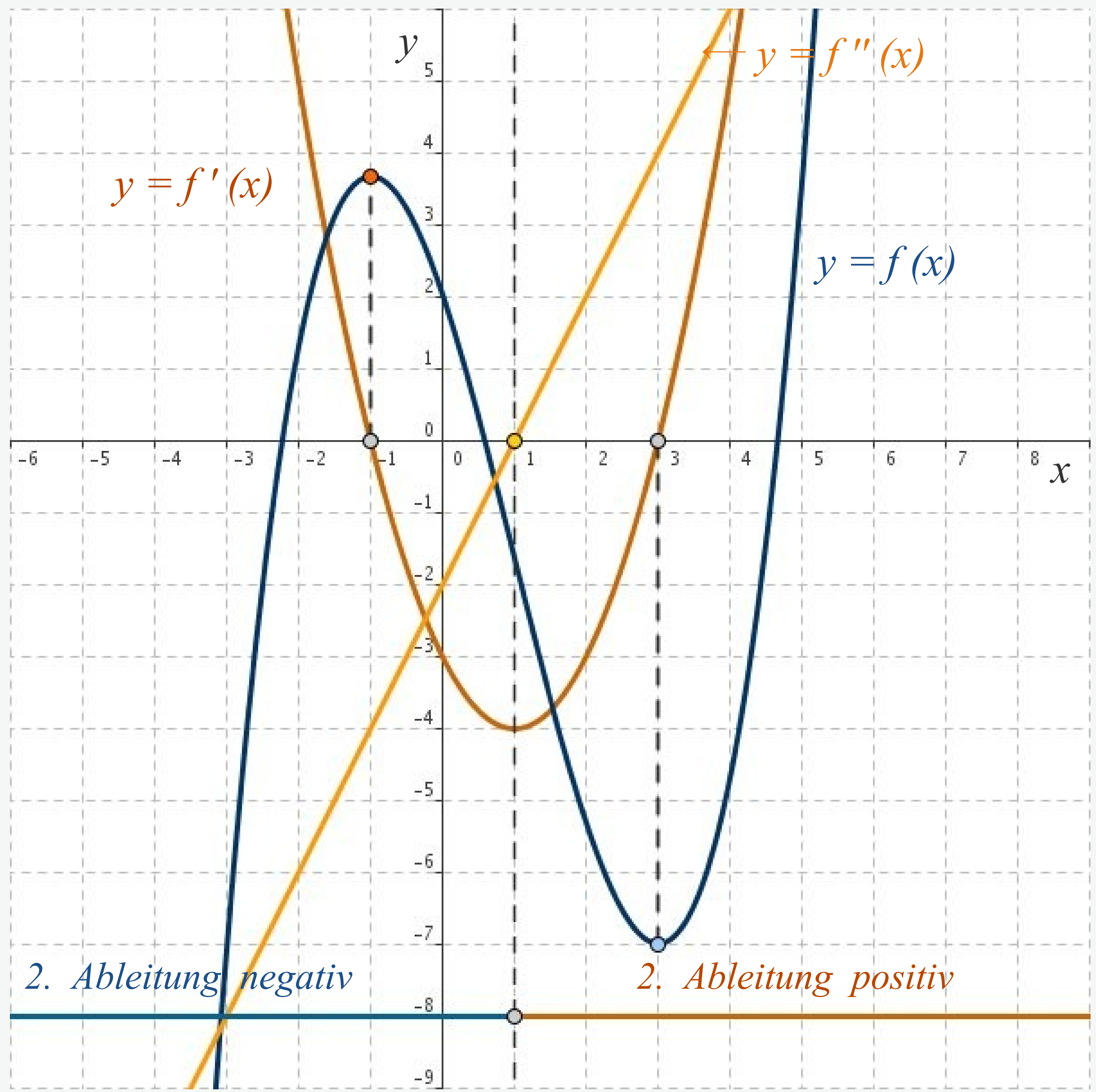
Die 2. Ableitung ist an der Stelle $x = -1$ kleiner als 0: $f''(-1) = -4$

$P_{max} = (-1, f(-1)) = (-1, 3.67)$ – ein lokales Maximum

Die 2. Ableitung ist an der Stelle $x = 3$ größer als 0: $f''(3) = 4$

$P_{min} = (3, f(3)) = (3, -7)$ – ein lokales Minimum

Extrema: Beispiel 1



Extrema: Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$$

Man untersuche den Graphen von $f(x)$ auf lokale Extrempunkte und ermittle gegebenenfalls die Art der Extrema.

Lösung:

$$D(f(x)) = \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{-6x^2 + 24}{(x^2+4)^2}, \qquad f''(x) = \frac{12x^3 - 144x}{(x^2+4)^3}$$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

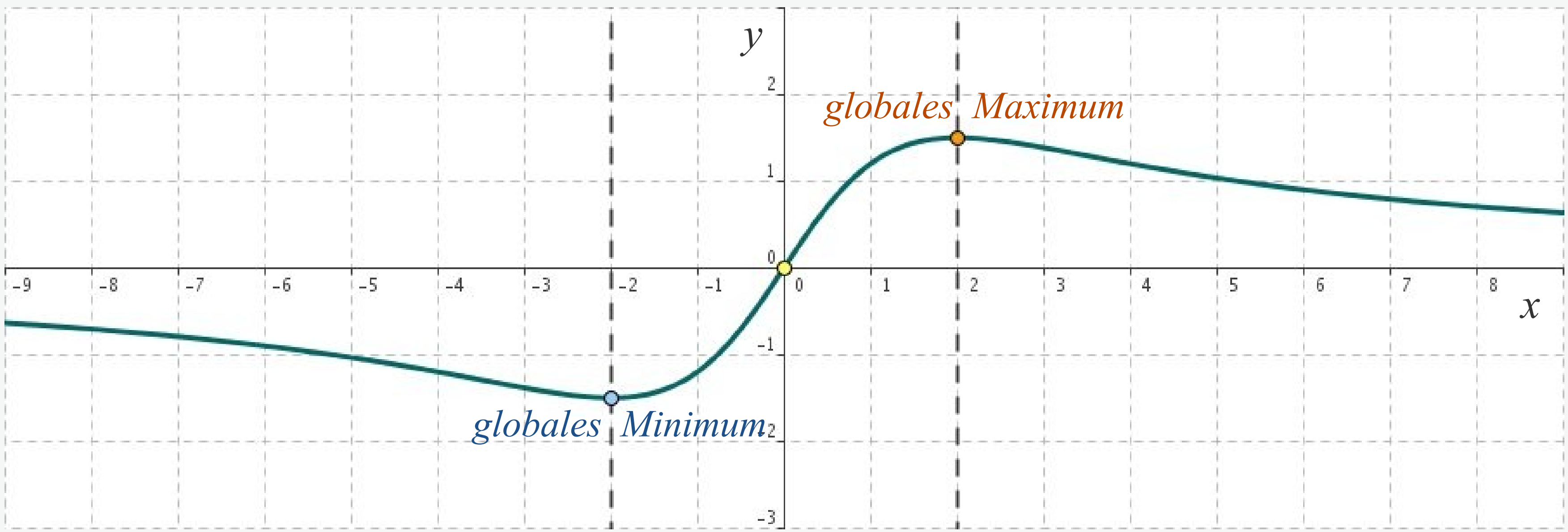
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x^2 + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E_1} = -2, \quad x_{E_1} = 2$$

$$f''(-2) = 0.375 > 0 \quad - \text{ ein lokales Minimum}$$

$$f''(2) = -0.375 < 0 \quad - \text{ ein lokales Maximum}$$

Ermitteln der Extrempunkte:

$$P_{min} = (-2, \ f(-2)) = (-2, \ -1.5), \qquad P_{max} = (2, \ f(2)) = (2, \ 1.5)$$



Die Abbildung der Funktion f (x).

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{x^2 + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{x^2 \left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{x \left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)} \simeq \lim_{x \to \infty} \frac{6}{x} = 0 + \varepsilon$$

$$\varepsilon \to 0\,(>0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \simeq \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x} = 0 - \varepsilon$$

Eine Wendestelle ist dadurch gekennzeichnet, dass die 1. Ableitung an dieser Stelle ein Extremum haben muss. Mögliche Wendestellen liegen also immer an denjenigen Stellen vor, an denen die 2. Ableitung Nullstellen besitzt.

Für die Existenz einer Wendestelle gilt folgende hinreichende Bedingung:

Eine Funktion f sei in ihrem Definitionsbereich dreimal differenzierbar. Gilt für eine Stelle des Definitionsbereiches

$$f''(x_W) = 0\,, \qquad f'''(x_W) \neq 0$$

so hat f an dieser Stelle eine *Wendestelle*.

Es gibt Wendestellen, für die außerdem gilt

$$f'(x_W) = 0$$

An solchen Stellen verläuft die Tangente an den Graphen von *f(x)* parallel zur *x*-Achse. Man nennt solche Wendepunkte Sattelpunkte.

Wir bestimmen die Wendestellen der Funktion $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$$

$$f'''(x) = 72x - 48$$

Notwendige Bedingung $f''(x_W) = 0$

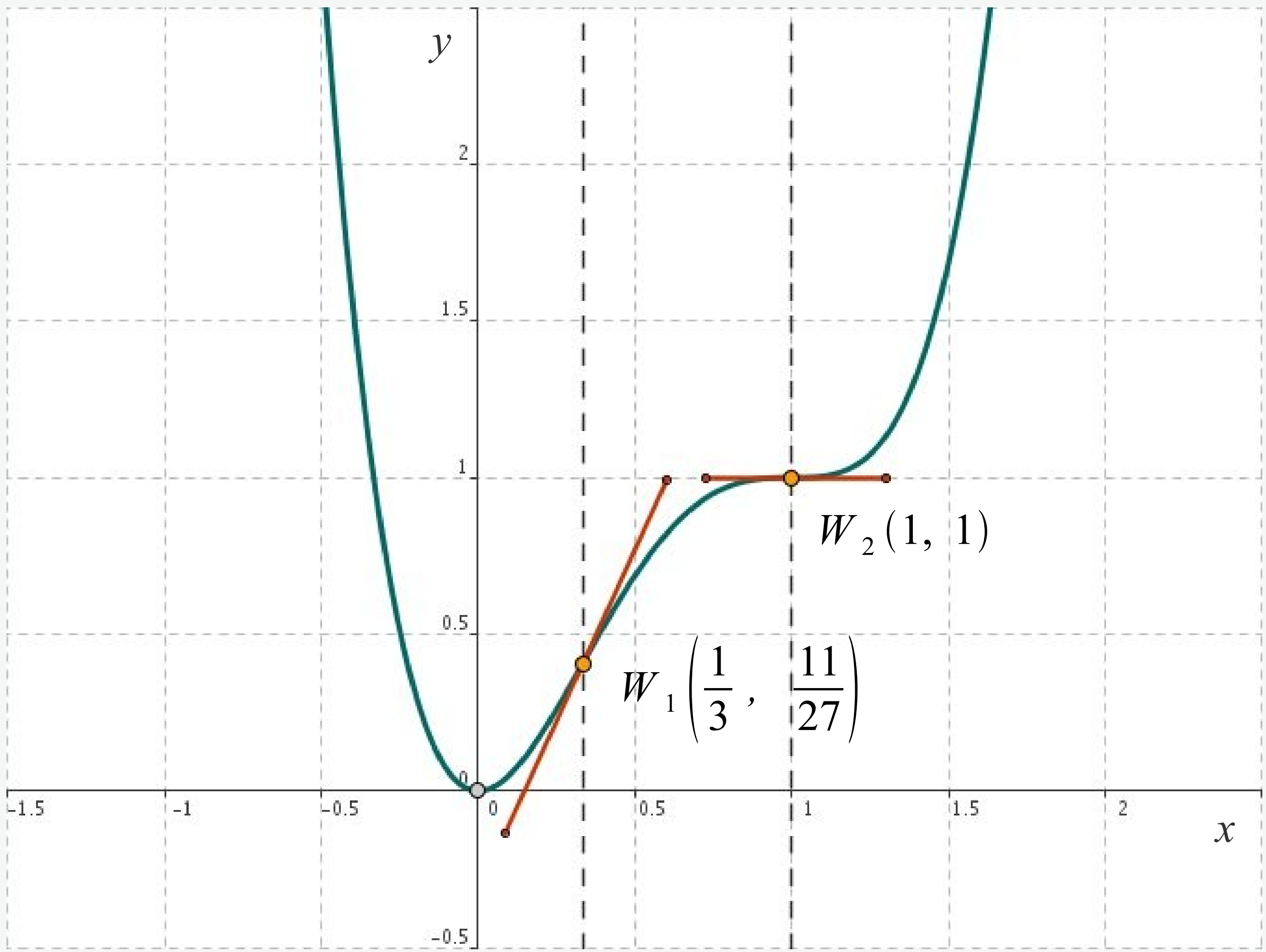
$$36x^2 - 48x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{W_1} = \frac{1}{3}, \qquad x_{W_2} = 1$$

Hinreichende Bedingung $f'''(x_W) \neq 0$

$$f'''\left(\frac{1}{3}\right) = -24, \qquad f'''(1) = 24$$

Wendepunkte $W_1\left(\frac{1}{3}, \ \frac{11}{27}\right), \qquad W_2(1, \ 1)$



Die Abbildung der Funktion f (x): $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

Wir bestimmen die Wendestellen der Funktion $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

$$f'(x) = 5x^3(3x - 4)$$

$$f''(x) = 60x^2(x - 1)$$

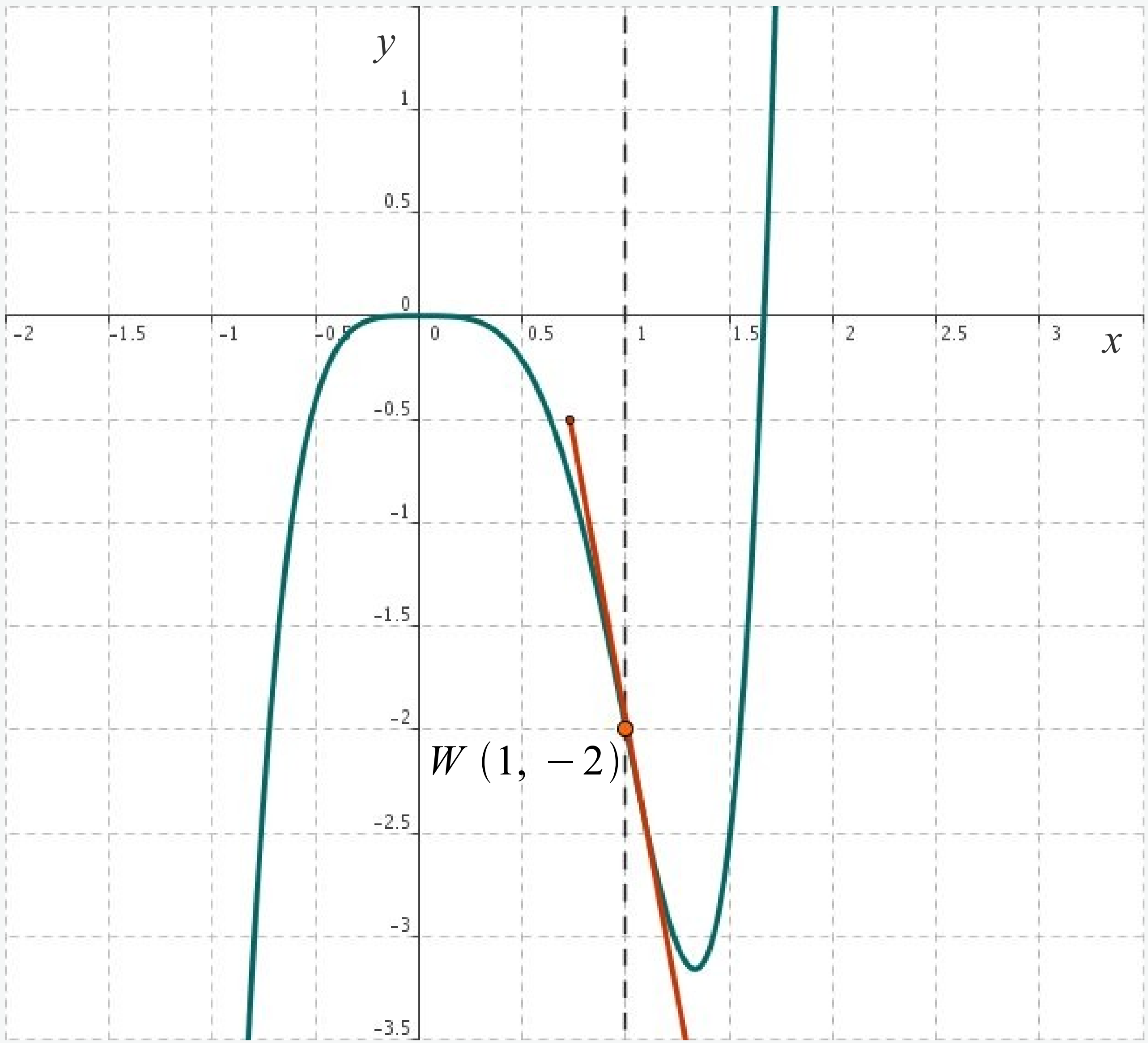
$$f'''(x) = 60x(3x - 2)$$

Notwendige Bedingung $f''(x_W) = 0$

$$x_{W_1} = 0, \qquad x_{W_2} = 1$$

Hinreichende Bedingung $f'''(x_W) \neq 0$ ist für $x = 0$ nicht erfüllt.

Wendepunkten: *Aufgabe 2*



Die Abbildung der Funktion f (x): $f\,(x) = 3\,x^5 - 5\,x^4$

$$f(x) = x^4 - x^2$$

Nullstellen:

$$f(x_N) = x_N^4 - x_N^2 = x_N^2\,(x_N^2 - 1) = 0$$

Drei Nullstellen: $x_{N_0} = 0, \quad x_{N_1} = 1, \quad x_{N_2} = -1$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 2$$

$$f'''(x) = 24x$$

Extrempunkte:

$$f'(x_E) = 0$$

$$f'(x_E) = 4x_E^3 - 2x_E = 0, \quad 2x_E\,(2x_E^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{E_1} = 0, \quad x_{E_{2,3}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$y_{E_1} = f(0) = 0, \quad y_{E_2} = f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$y_{E_3} = f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad H(0, 0) - \text{ lokales Maximum}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 6 - 2 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad T_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,; -\frac{1}{4}\right) - \text{ lokales Minimum}$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 6 - 2 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad T_2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\,; -\frac{1}{4}\right) - \text{ lokales Minimum}$$

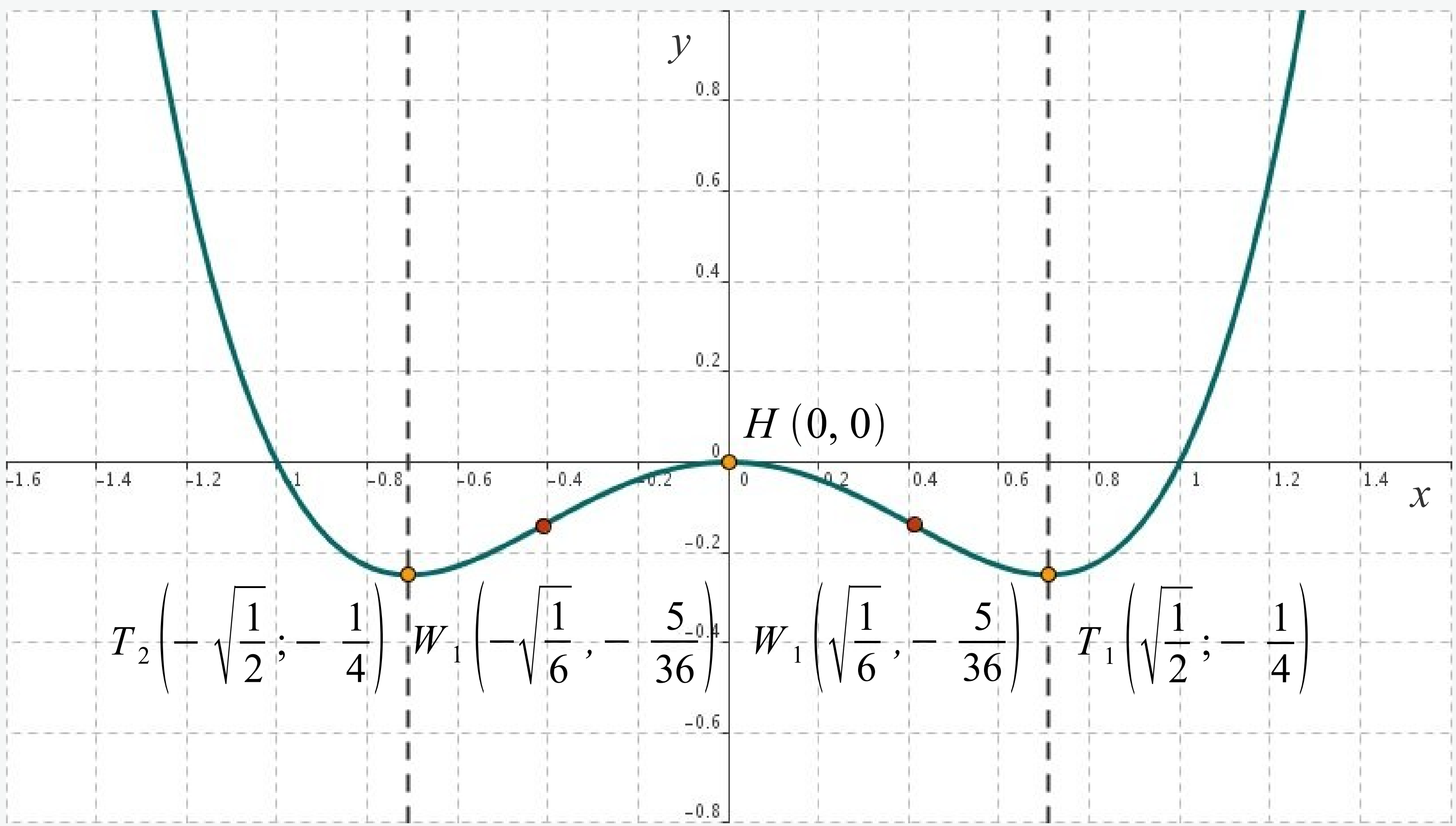
Wendepunkte: $f''(x_W) = 0$

$$f''(x) = 12\, x_W^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{W_1} = \sqrt{\frac{1}{6}}\,, \quad x_{W_2} = -\sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$y_{W_1} = f(x_{W_1}) = -\sqrt{\frac{5}{36}}\,, \qquad y_{W_2} = f(x_{W_2}) = -\sqrt{\frac{5}{36}}$$

$$W_1(x_{W_1}, y_{W_1}) = W_1\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,, -\frac{5}{36}\right), \qquad W_2(x_{W_2}, y_{W_2}) = W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}\,, -\frac{5}{36}\right)$$

Extrem- und Wendepunkte: Aufgabe 3



Die Abbildung der Funktion f (x): $f\,(x) = x^4 - x^2$