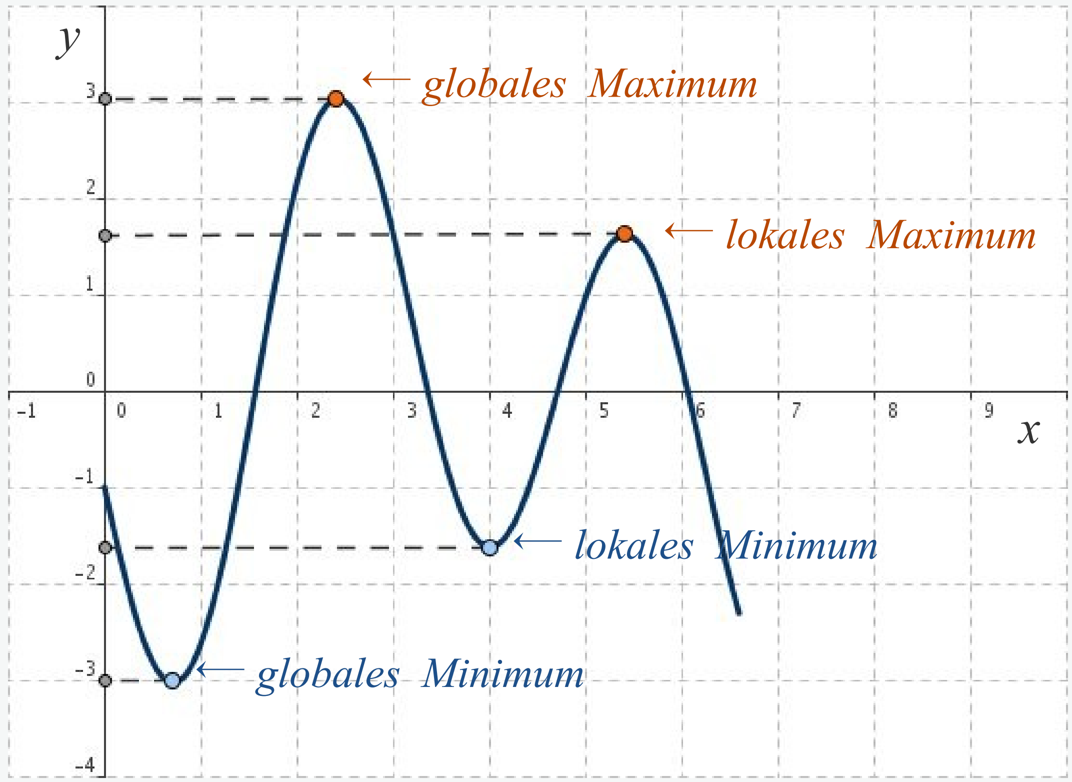
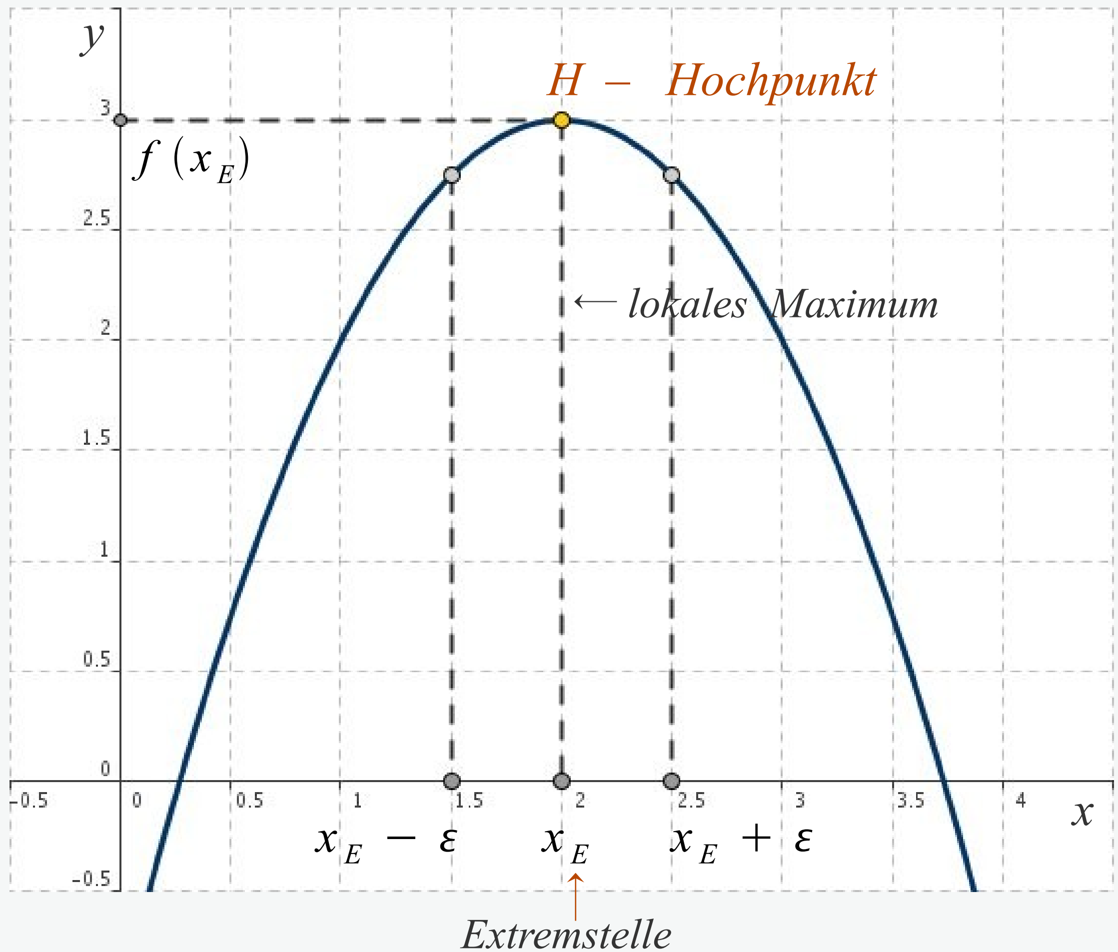


Maximum- und Minimumstellen, die der Graph einer Funktion in einem hinreichend kleinen Intervall besitzt, nennt man lokale Extremstellen, die zugehörigen Funktionswerte lokale Extrema und die Punkte lokale Extrempunkte.

Will man den absolut größten (bzw. kleinsten) Funktionswert einer Funktion im gesamten Definitionsbereich ermitteln, so sucht man sogenannte globale Extrema.

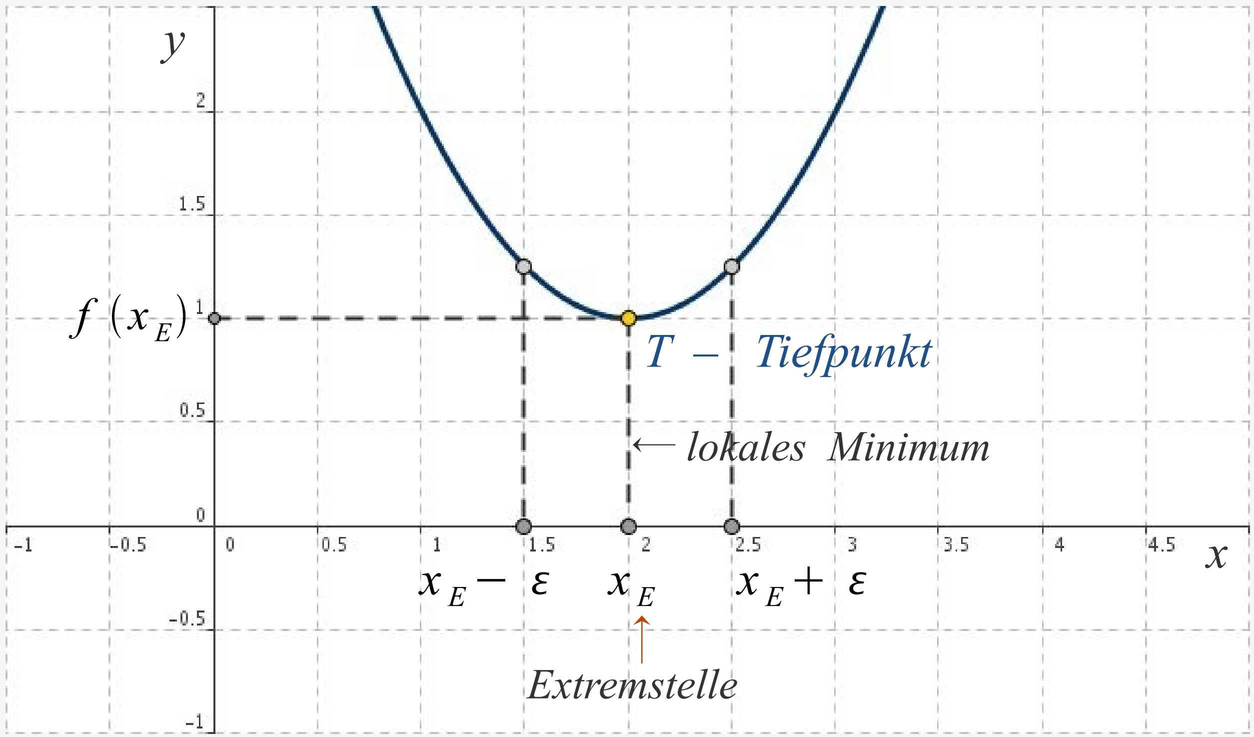
Lokales Maximum



$$\varepsilon > 0, \quad x_E - \varepsilon < x < x_E + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_E)$$

$$x_E \; - \; \text{lokale Extremstelle}$$

$$E(x_E,\; f(x_E)) \; - \; \text{lokaler Extrempunkt}$$



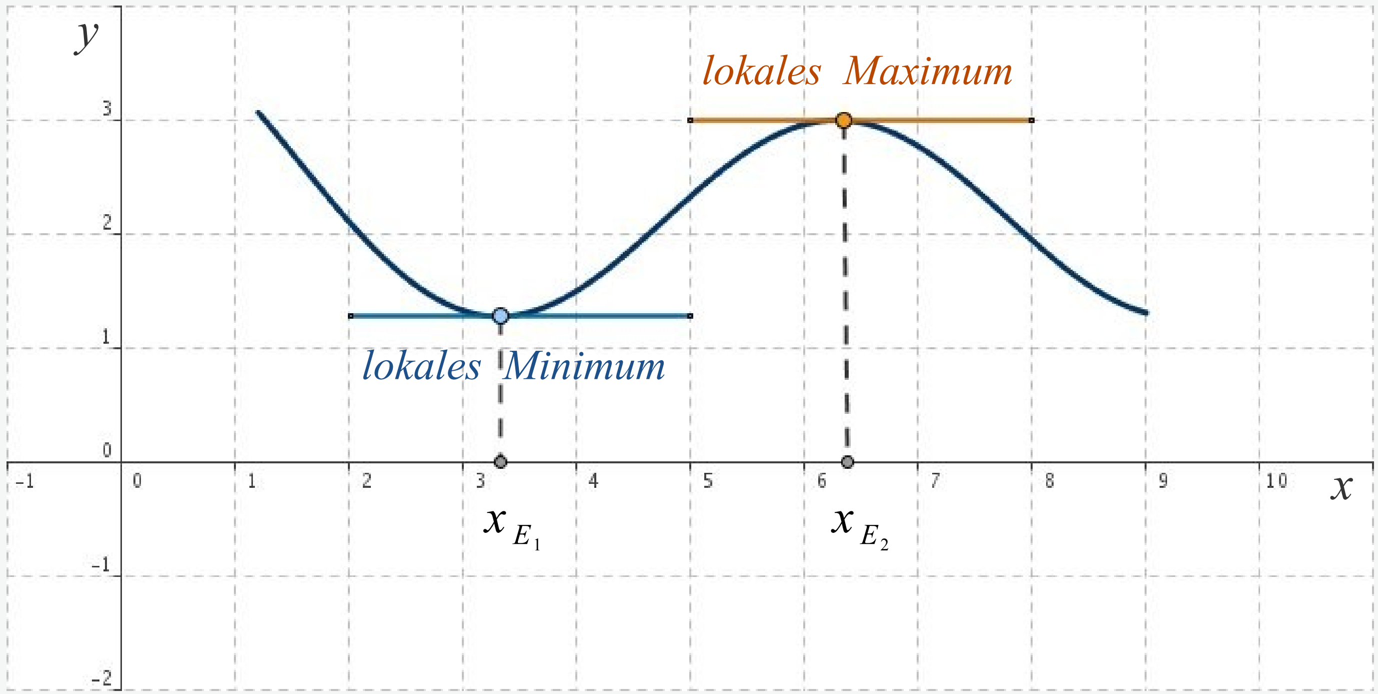
$$\varepsilon > 0\,, \quad x_E - \varepsilon < x < x_E + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_E)$$

$$x_E \quad - \quad \text{lokale Extremstelle}$$

$$E\,(x_E\,,\; f(x_E)) \quad - \quad \text{lokaler Extrempunkt}$$

Charakteristisches Merkmal eines lokalen Extremums ist die Änderung des Monotonieverhaltens der Funktion. Während beim lokalen Maximum ein Wechsel des Monotonieverhaltens von “monoton wachsend” in “monoton fallend” typisch ist, erfolgt er beim lokalen Minimum von “monoton fallend” zu “monoton wachsend”.

Extrema: Notwendige Bedingung



$$f\,'(x_{E_1}) = 0\,, \qquad f\,'(x_{E_2}) = 0$$

<u>Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen:</u>

Ist die Funktion f in ihrem Definitionsbereich D differenzierbar und $x_E \in D$ eine lokale Extremstelle von f, so gilt

$$f\,'(x_E) = 0$$

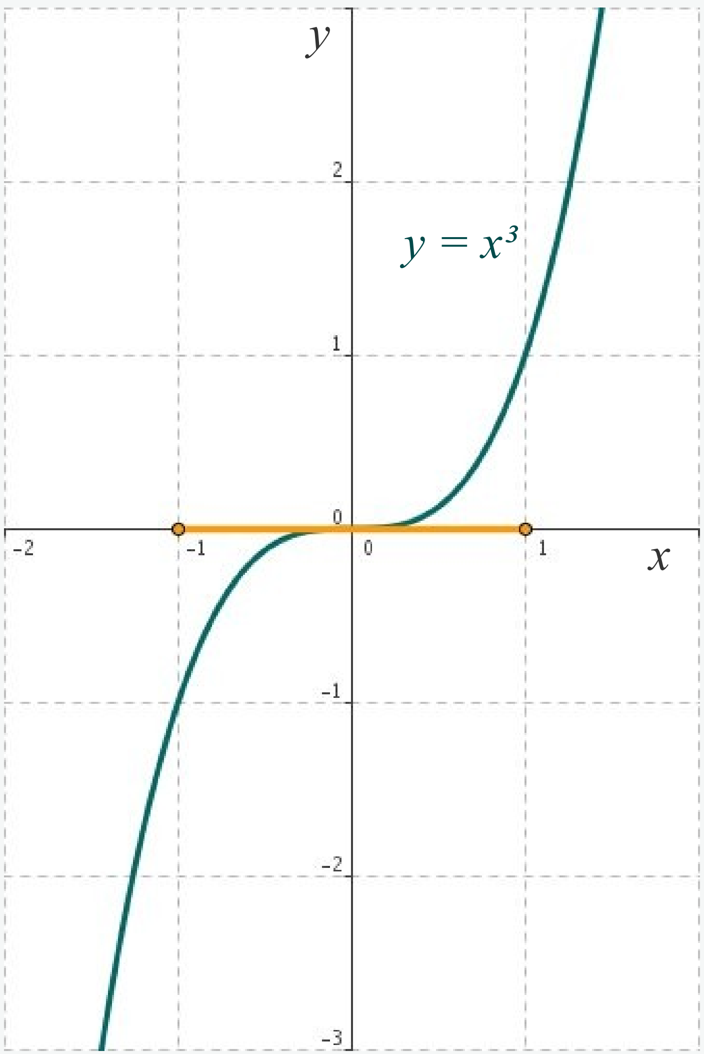
Diese Bedingung ist notwendig, aber <u>nicht hinreichend!</u>

Am Beispiel dieser Funktion demonstrieren wir, dass die Bedingung

$$f'(x_E) = 0$$

nicht hinreichend ist.

Die Funktion $y = x^3$ besitzt an der Stelle $x = 0$ kein lokales Extremum.



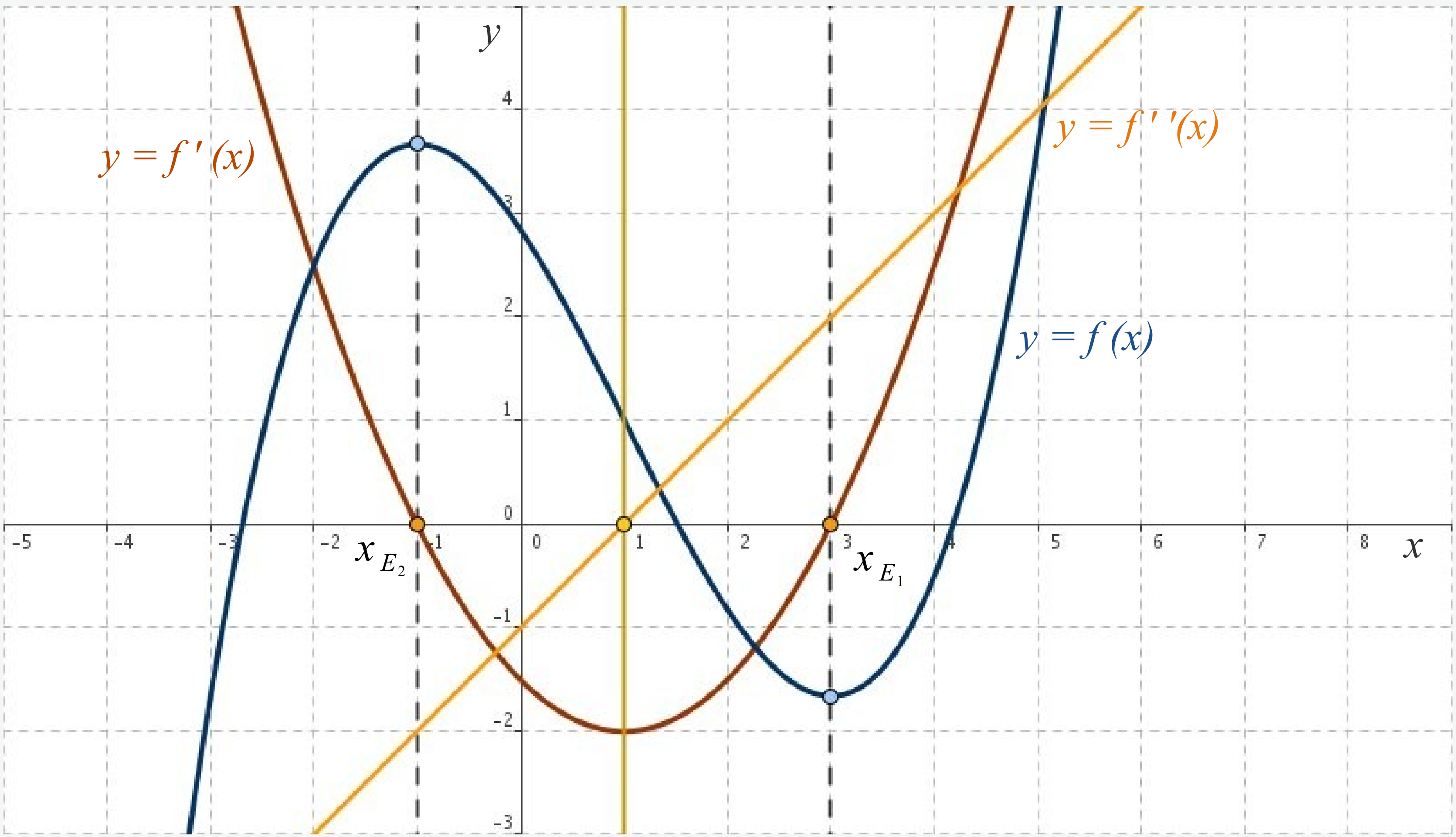
Die Funktion $f(x)$ ist auf mögliche lokale Extremstellen zu untersuchen

$$f(x) = \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x + \frac{17}{6}$$

1. $f'(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - x - \frac{3}{2}$
2. Wir ermitteln die x-Werte, für die $f'(x_E) = 0$
3. $\frac{1}{2}\,x_E^2 - x_E - \frac{3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E^2 - 2\,x_E - 3 = 0$
4. $x_{E_1} = 3\,, \qquad x_{E_2} = -1$
5. $f(3) = -\frac{5}{3}\,, \qquad f(-1) = \frac{11}{3}$
6. $P_1\left(3,\ \frac{5}{3}\right), \qquad P_2\left(-1,\ \frac{11}{3}\right)$ – diese Punkte können Extrempunkte sein.

Für die Entscheidung, ob an diesen Stellen tatsächlich Extrema vorliegen, müssen weitere Bedingungen erfüllt werden.

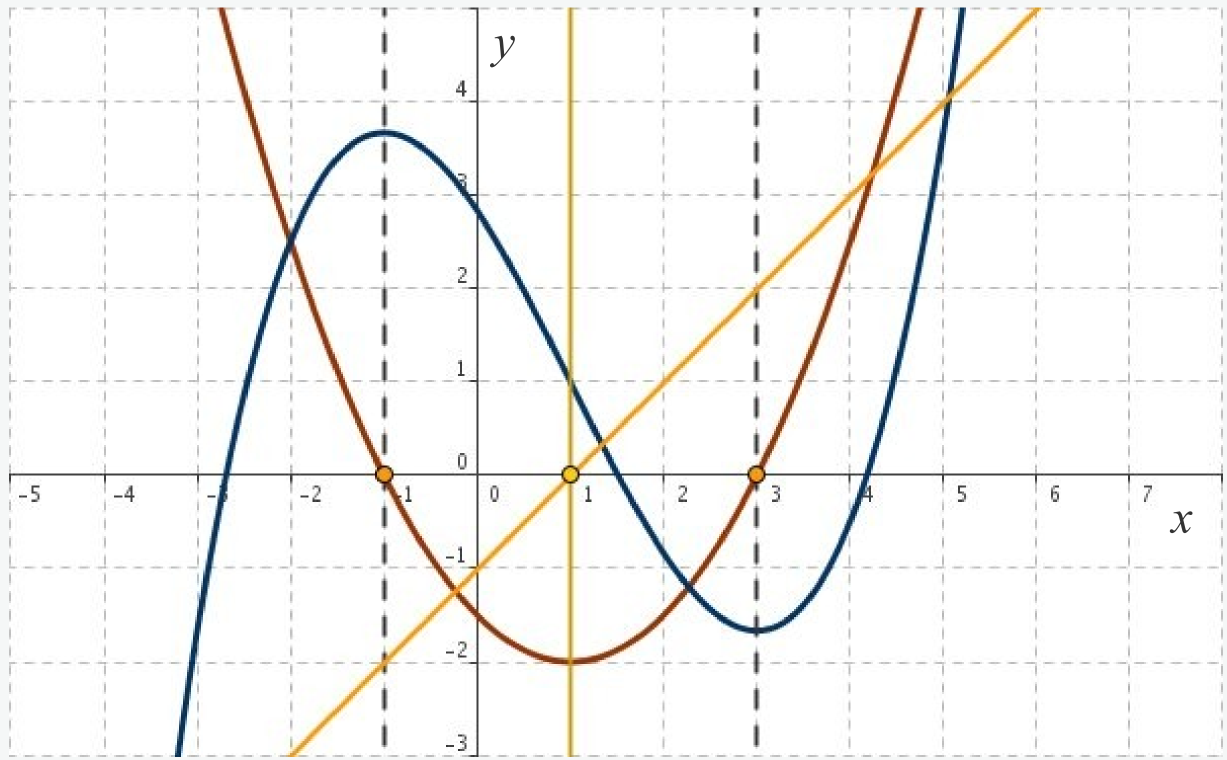
Extrema: Aufgabe 2



$$f\,(x) = \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x + \frac{17}{6}$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - x - \frac{3}{2}, \qquad f\,''(x) = x - 1$$

Extrema: Aufgabe 2



Für die Entscheidung, ob an einer Stelle ein Extremwert vorliegt, ist oft auch das sogenannte "Vorzeichenwechselkriterium" sehr hilfreich. In der Abbildung sind der Graph einer Funktion $f(x)$ und die zugehörige 1. und 2. Ableitung dargestellt. Man erkennt, dass die 1. Ableitung an den lokalen Extremstellen ihr Vorzeichen ändert, beim lokalen Maximum von "+" zu "–" und beim lokalen Minimum von "–" zu "+". Zusätzlich ist zu erkennen, dass die 2. Ableitung an einer lokalen Maximumstelle einen negativen Wert und an einer lokalen Minimumstelle einen positiven Wert hat.

Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen:

Die Funktion f sei in ihrem Definitionsbereich D zweimal differenzierbar. Gilt für $x_E \in D$

$$f\,'(x_E) = 0\,, \qquad f\,''(x_E) < 0$$

so hat die Funktion f an dieser Stelle ein lokales Maximum.

Die Funktion f sei in ihrem Definitionsbereich D zweimal differenzierbar. Gilt für $x_E \in D$

$$f\,'(x_E) = 0\,, \qquad f\,''(x_E) > 0$$

so hat die Funktion f an dieser Stelle ein lokales Minimum.

Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig!

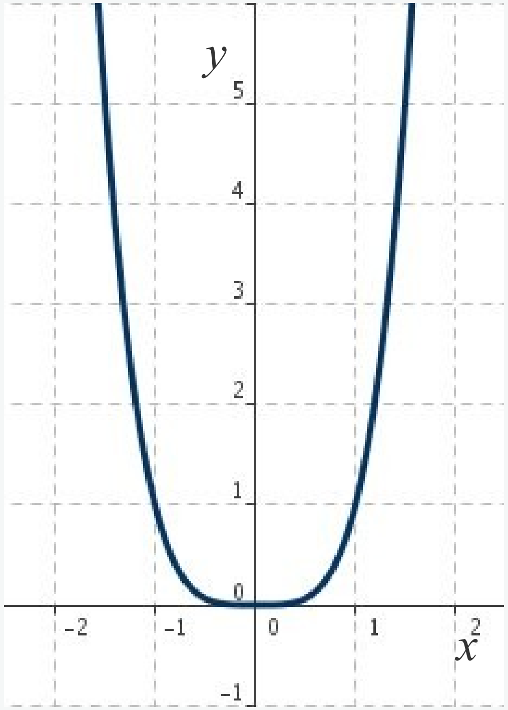
Es kann ein Extremwert vorliegen, obwohl die zweite Ableitung an der betreffenden Stelle auch Null wird.

$$f(x) = x^4$$

Diese Funktion besitzt an der Stelle $x = 0$ ein lokales Maximum, aber für sie gilt:

$$f'(x) = 4x^3, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2, \quad f''(0) = 0$$



Hier sind zusätzliche Überlegungen (z.B. Berechnung von Funktionswerten in einer Umgebung von x) erforderlich, um auf die Existenz und die Art des Extremums zu schließen.