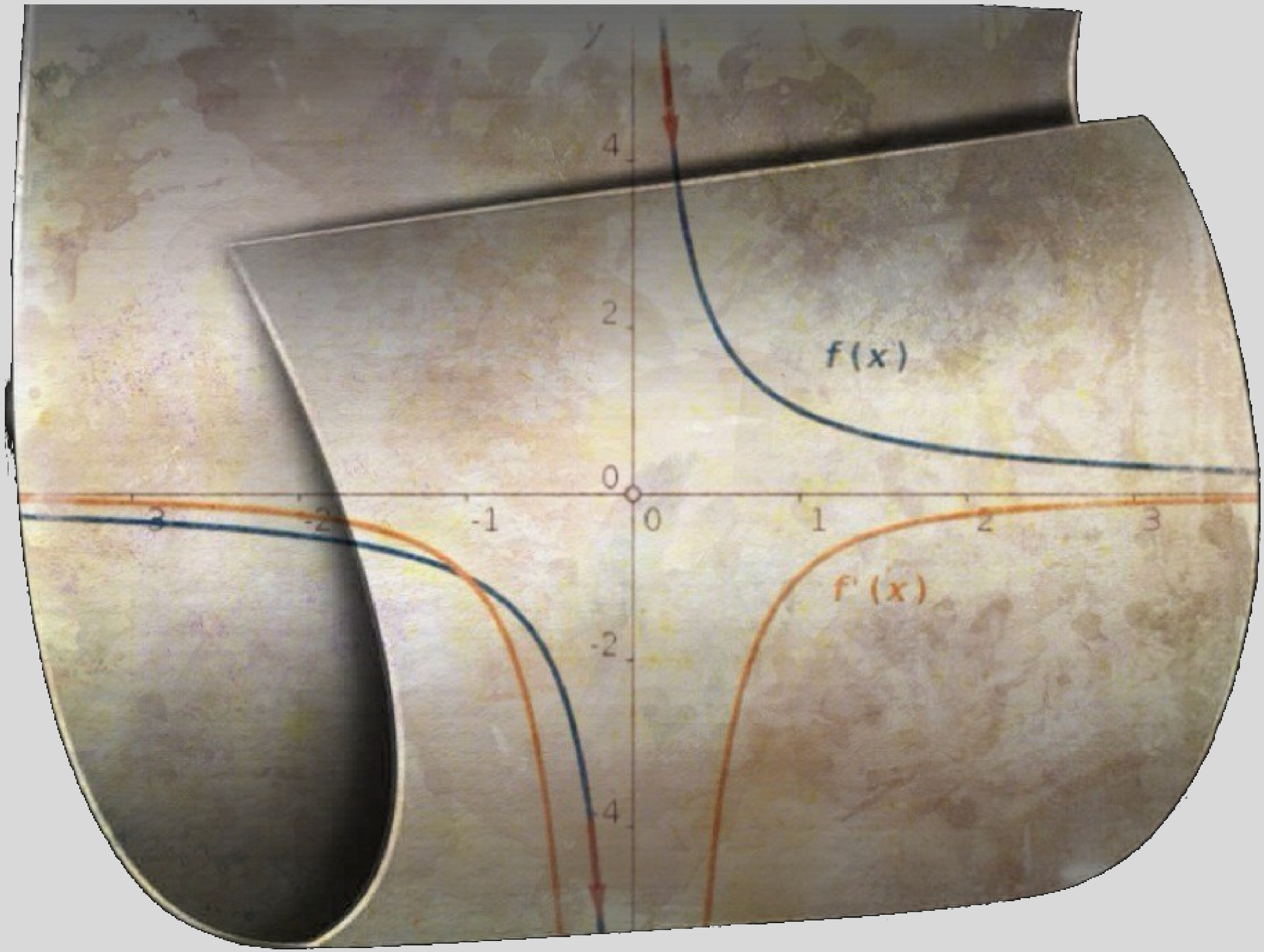

Monotonie und die erste Ableitung

Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

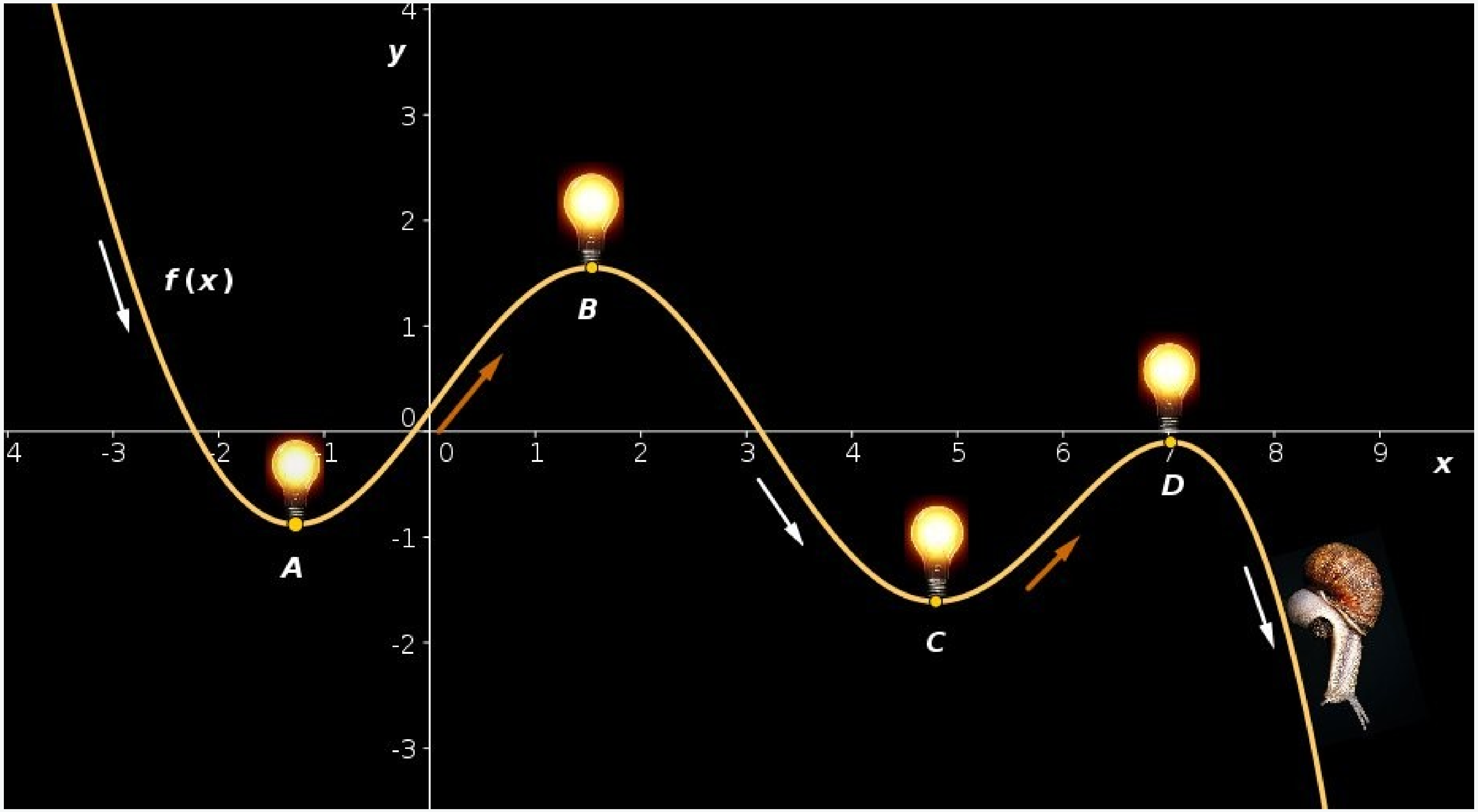

Abb. 1-1: Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens einer differenzierbaren Funktion y = f (x), In den Punkten A, B, C und D ändern sich das Monotonieverhalten

$$A = (x_A,\ f(x_A)), \quad B = (x_B,\ f(x_B)), \quad C = (x_C,\ f(x_C)), \quad D = (x_D,\ f(x_D))$$

Jetzt können wir den Verlauf der Funktion beschreiben. Die Funktion ist streng monoton fallend in den Intervallen:

$$(-\infty,\ x_A], \qquad [x_B,\ x_C], \qquad [x_D,\ \infty)$$

und streng monoton wachsend in den Intervallen $[x_A,\ x_B], \quad [x_C,\ x_D]$

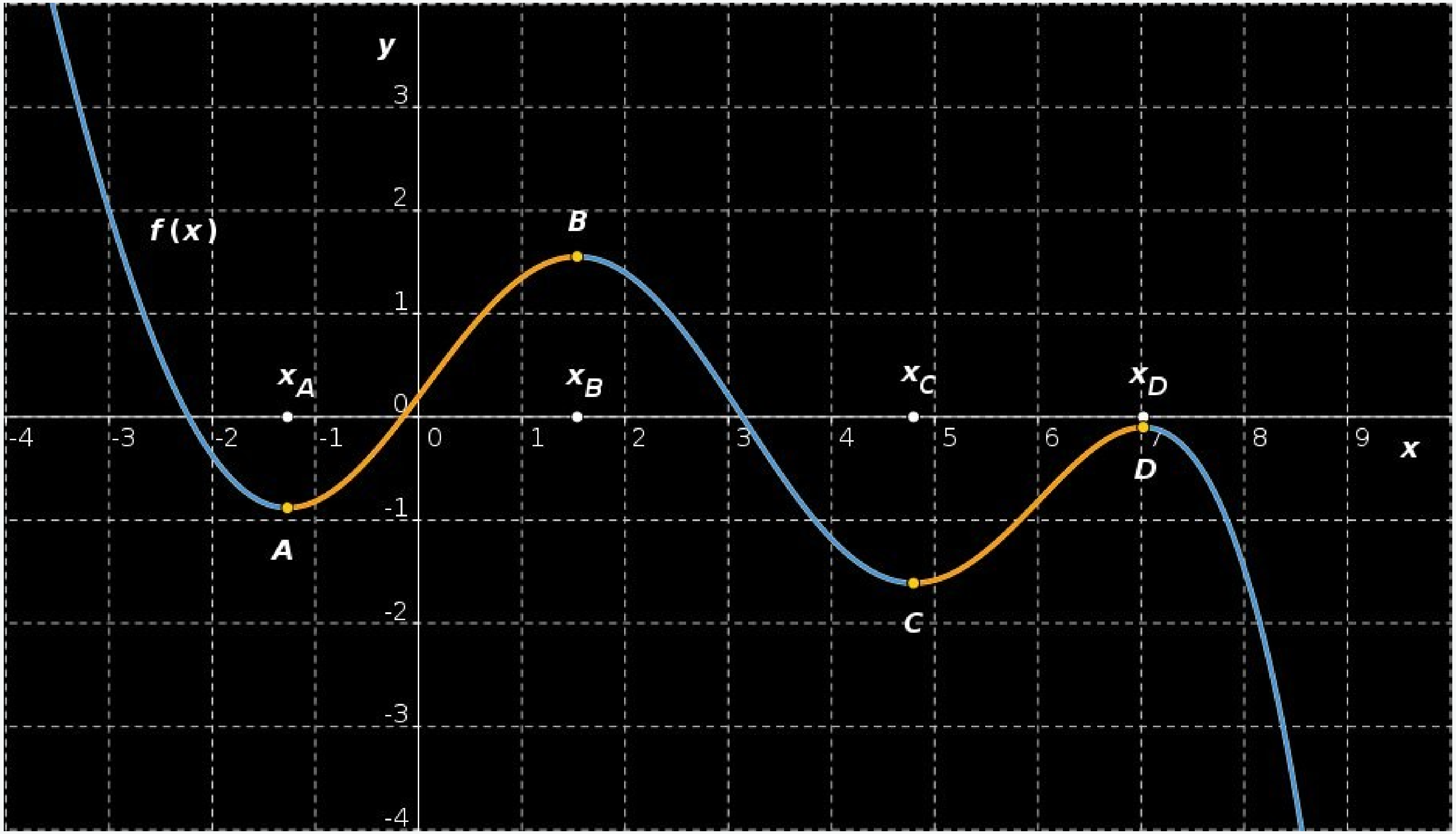

Abb. 1-2: Das Monotonieverhalten der differenzierbaren Funktion $y = f(x)$

Im Folgenden werden wir zeigen, wie man mit Hilfe der Ableitung das Monotonieverhalten untersucht.

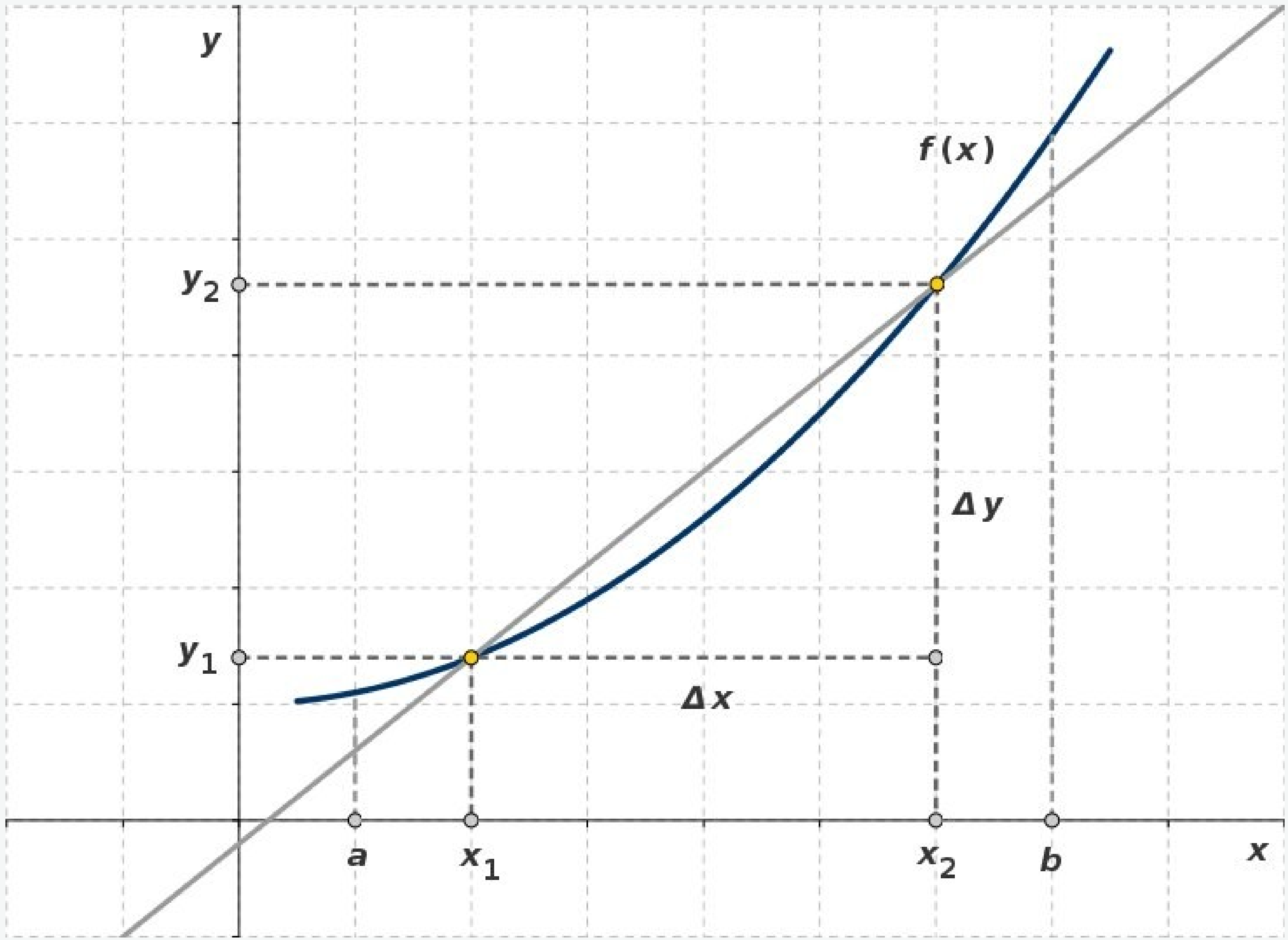

Abb. 2-1: Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens der differenzierbaren Funktion $y = f(x)$, $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$

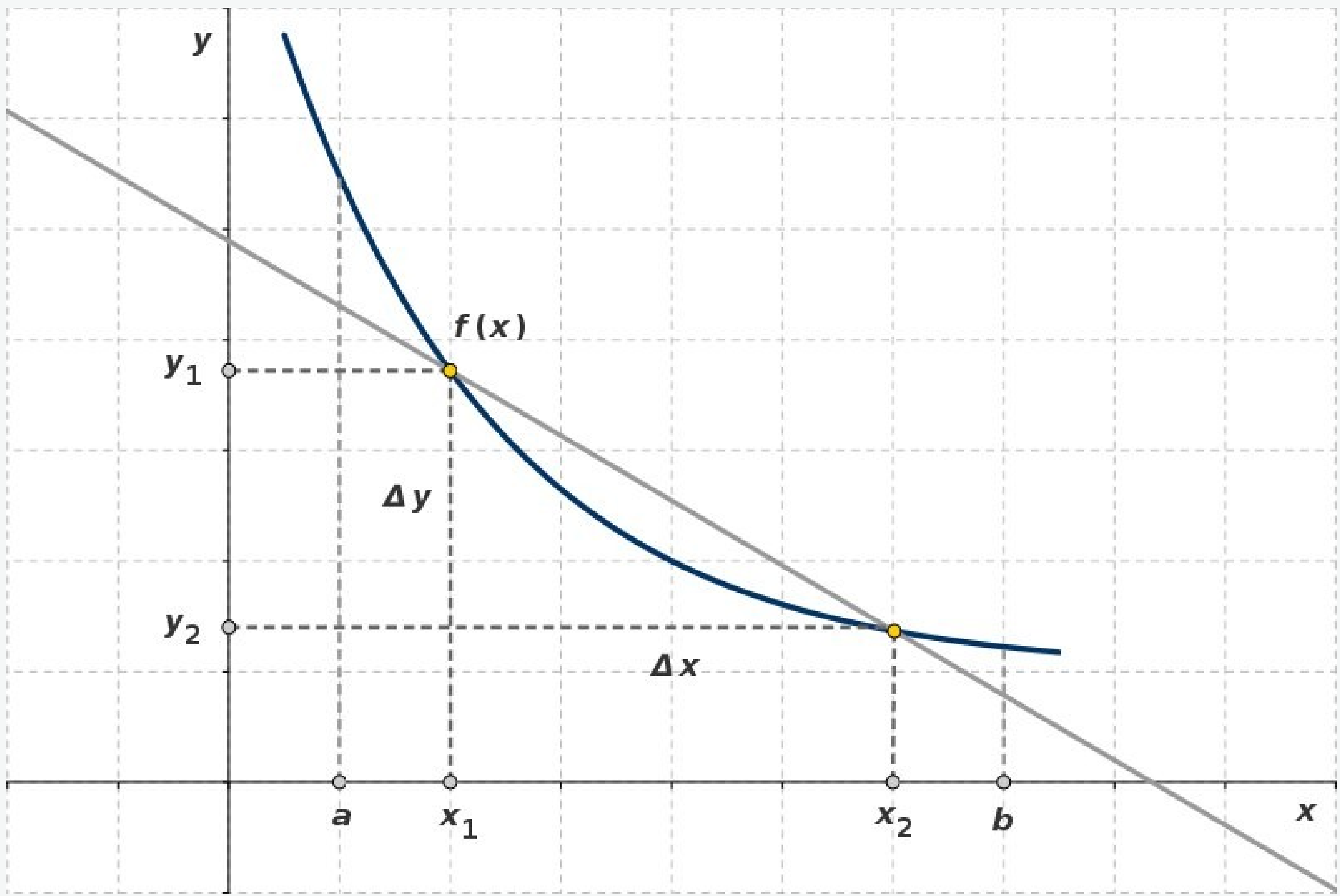

Abb. 2-2: Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens der differenzierbaren Funktion $y = f(x)$, $\Delta x > 0$, $\Delta y < 0$

Die Funktion $y = f(x)$ ist eine im Intervall $[a, b]$ differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion (Abb. *2-1*):

$$x_1 < x_2 , \qquad f(x_1) < f(x_2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

Die Funktion $y = f(x)$ ist eine im Intervall [a, b] differenzierbare, streng monoton fallende Funktion (Abb. *2-2*):

$$x_1 < x_2 , \qquad f(x_1) > f(x_2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

Monotoniekriterium einer differenzierbaren Funktion:

Eine in einem Intervall [a, b] differenzierbare Funktion ist

- monoton steigend, wenn für alle x in diesem Intervall
  $f'(x) \geq 0$
- monoton fallend, wenn für alle x in diesem Intervall
  $f'(x) \leq 0$
- konstant, wenn für alle x in diesem Intervall $f'(x) = 0$

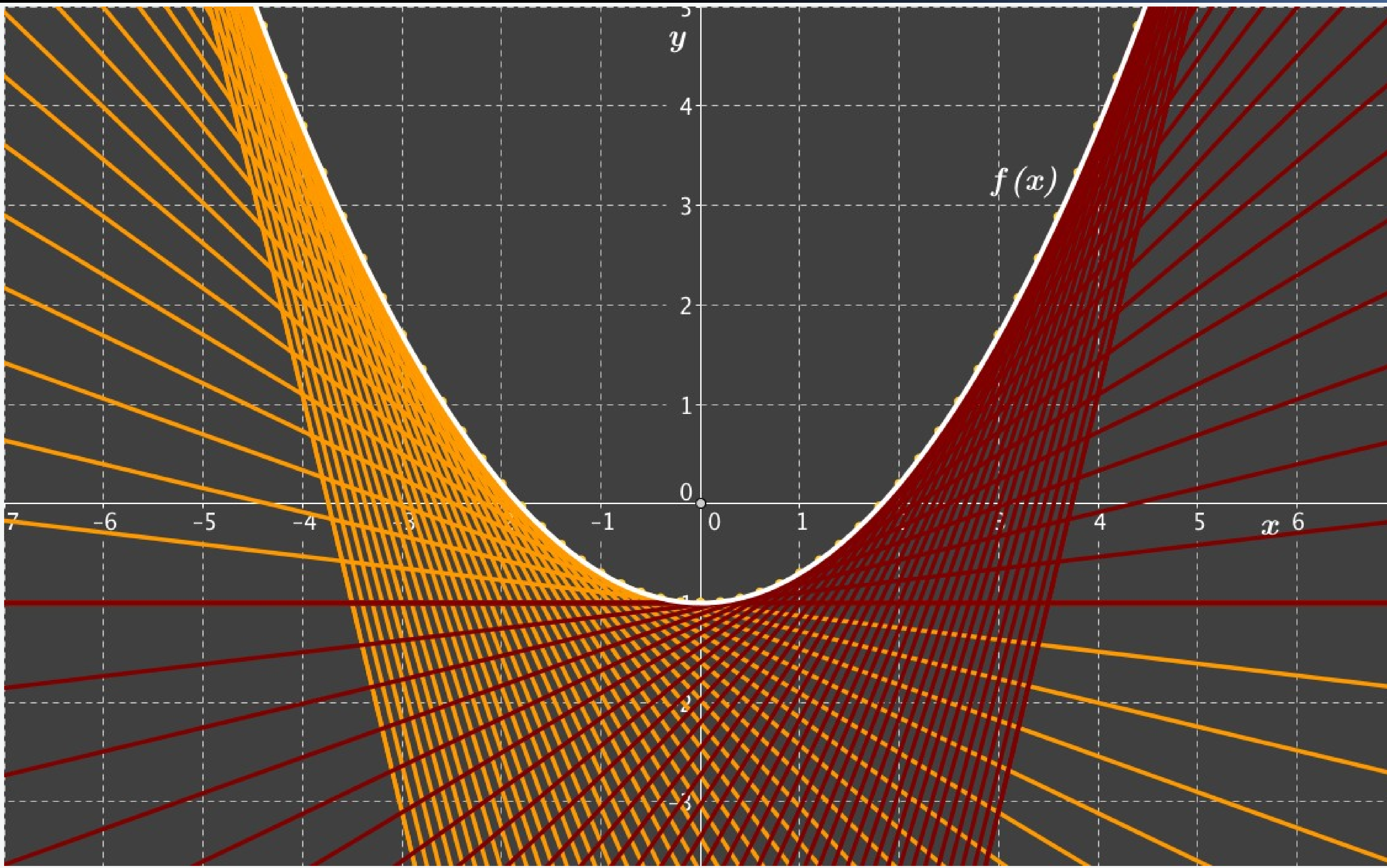

Abb. 2-3: Quadratische Funktion y = f (x) und einige ihrer Tangenten. Im negativen x-Bereich haben die Tangenten negative Steigung. Die Funktion (weiß dargestellt) ist monoton fallend. Im positiven x-Bereich haben die Tangenten positive Steigung. Die Funktion ist monoton steigend.

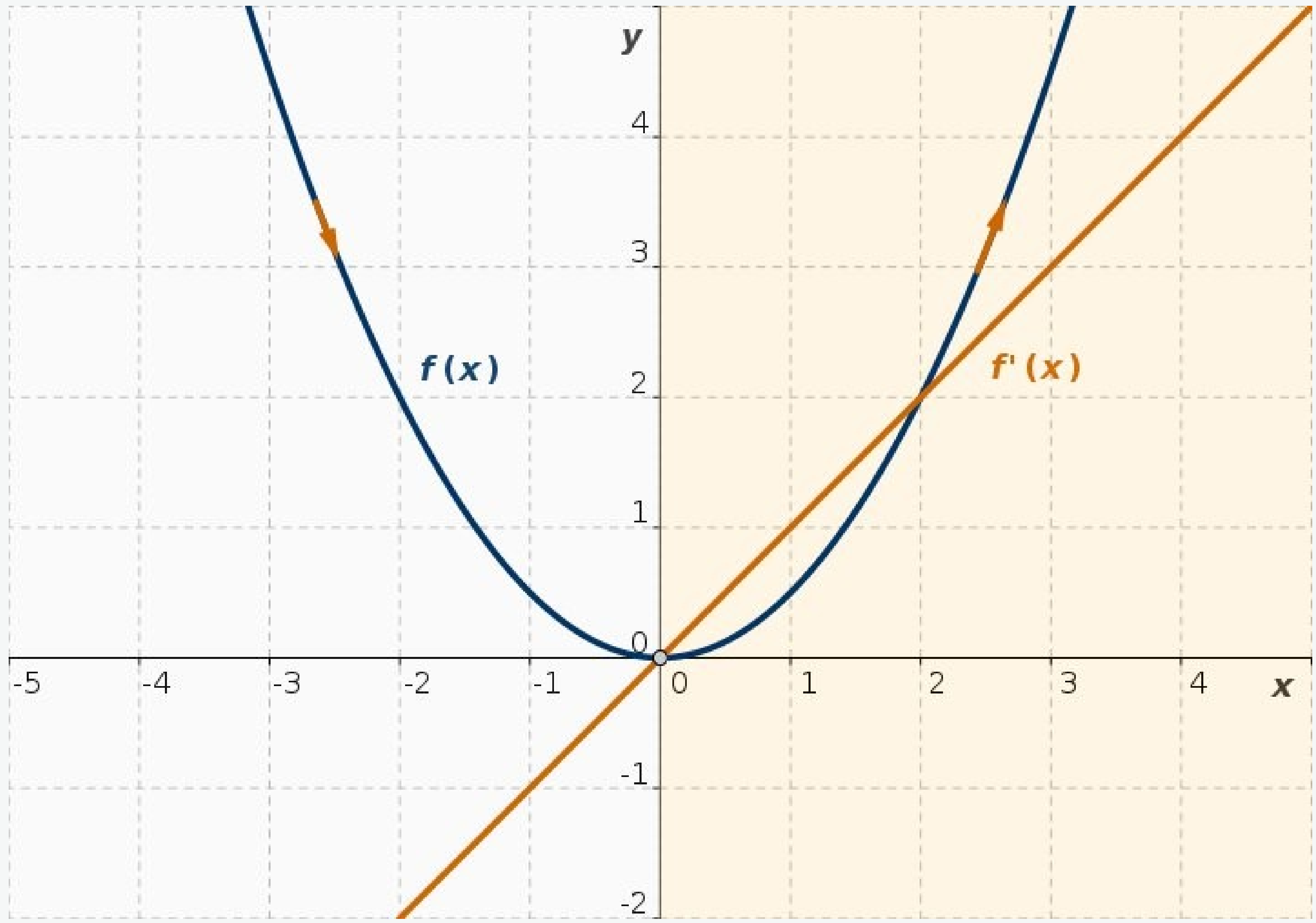

Abb. B1: Die Funktion $y = f(x)$ (blau) und ihre Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ (rot)

$$f(x) = 0.5\,x^2, \qquad f'(x) = x$$

Monotonieverhalten einer Funktion: Beispiel 2

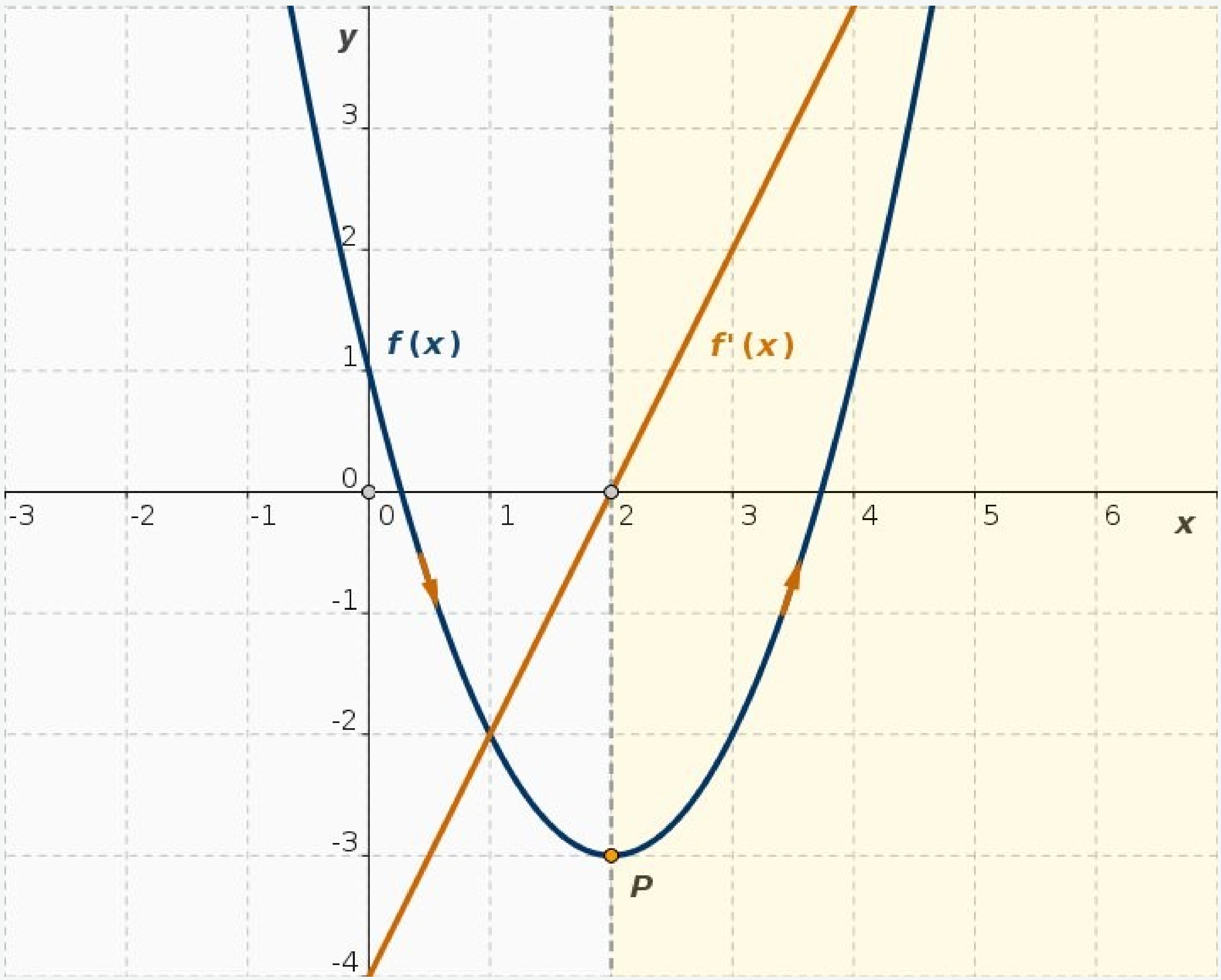

Abb. B2: Die Funktion y = f (x) (blau) und ihre Ableitungsfunktion y = f '(x) (rot)

$$f(x) = x^2 - 4x + 1, \qquad f'(x) = 2x - 4$$

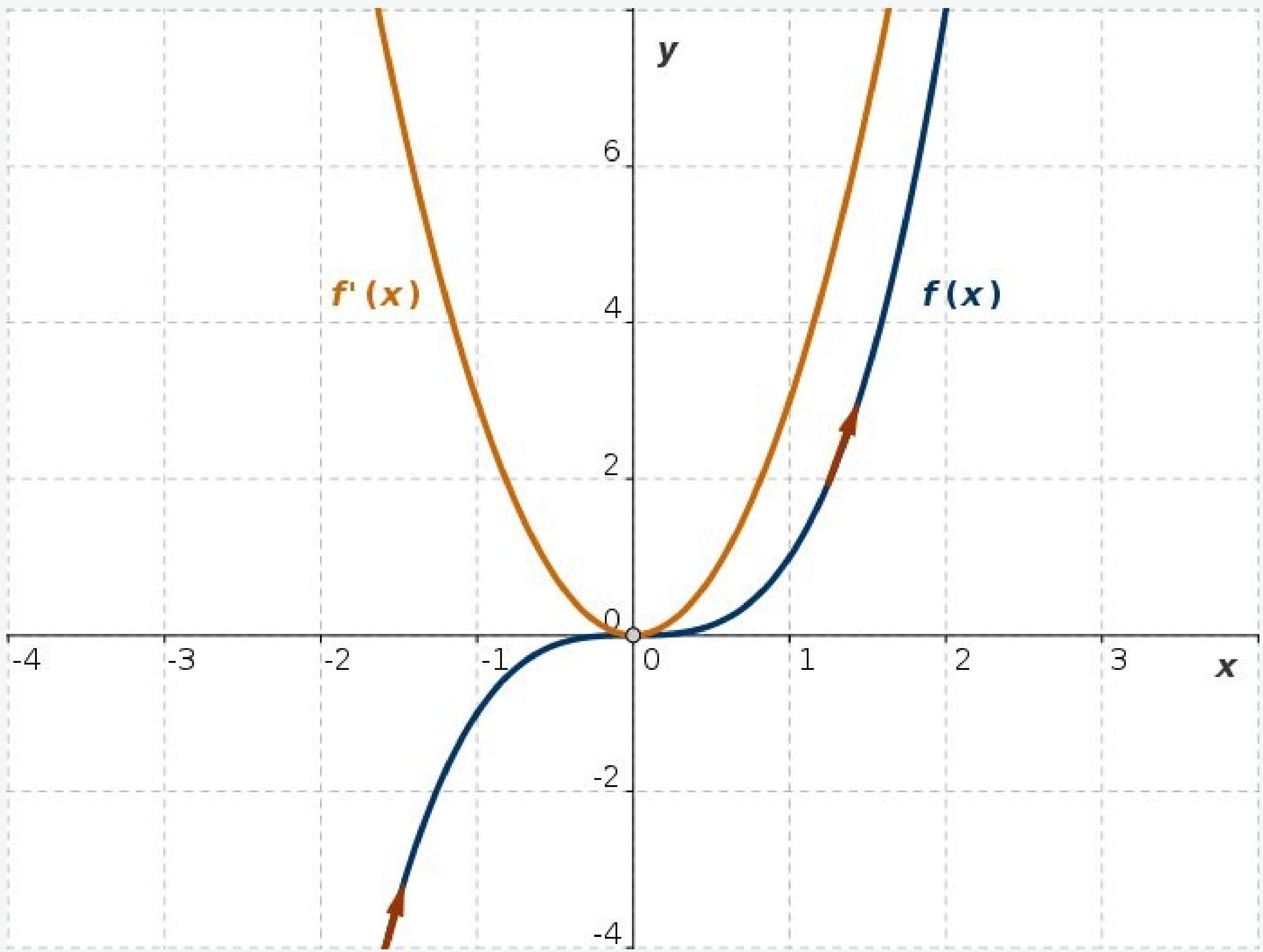

Abb. B3: Die Funktion $y = f(x)$ (blau) und ihre Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ (rot)

$$f(x) = x^3, \qquad f'(x) = 3x^2$$

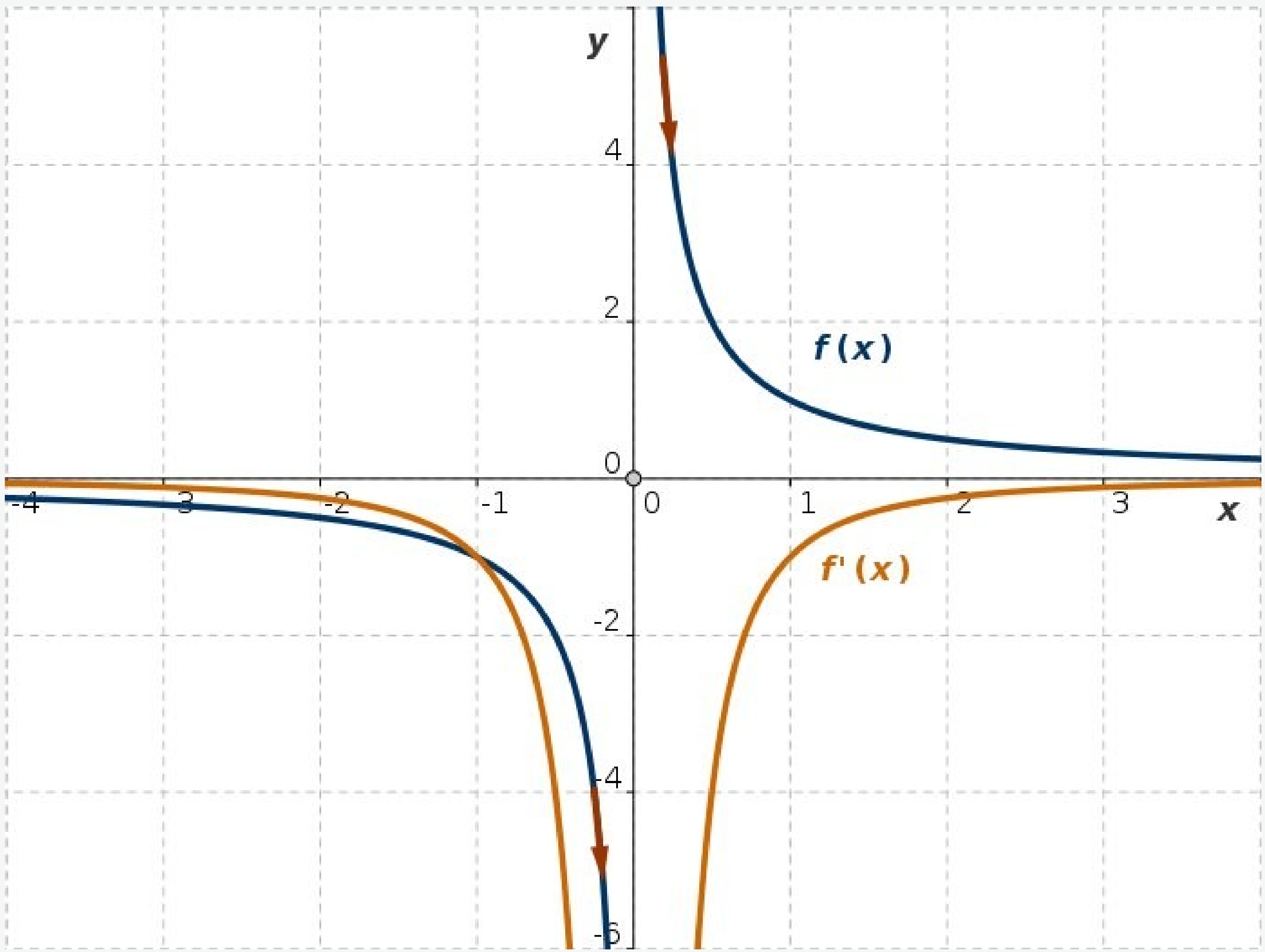

Abb. B4: Die Funktion y = f (x) (blau) und ihre Ableitungsfunktion y = f '(x) (rot)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

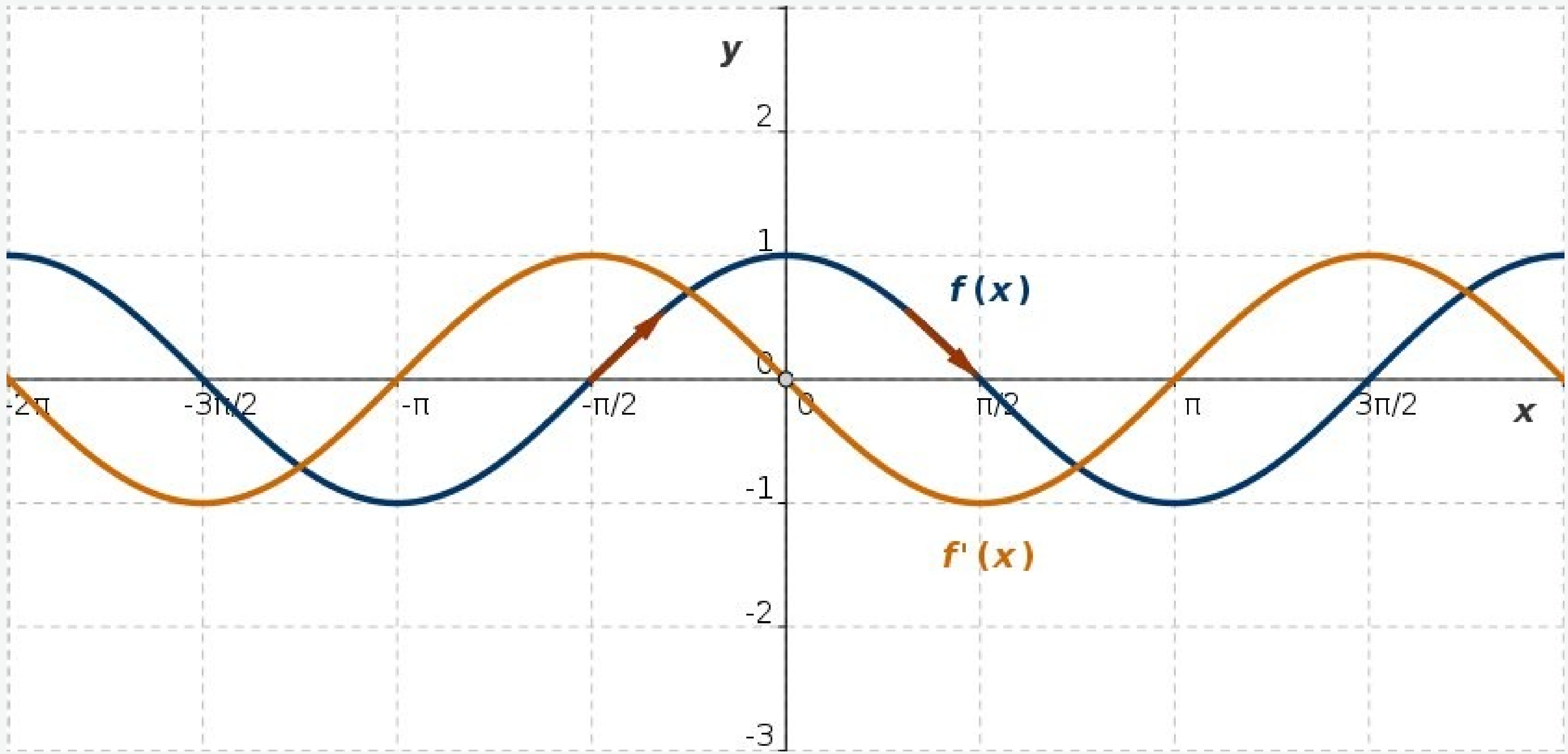

Abb. B5: Die Funktion y = f (x) (blau) und ihre Ableitungsfunktion y = f '(x) (rot)

$$f\,(x) = \cos x\,, \qquad f\,'(x) = -\,\sin x$$