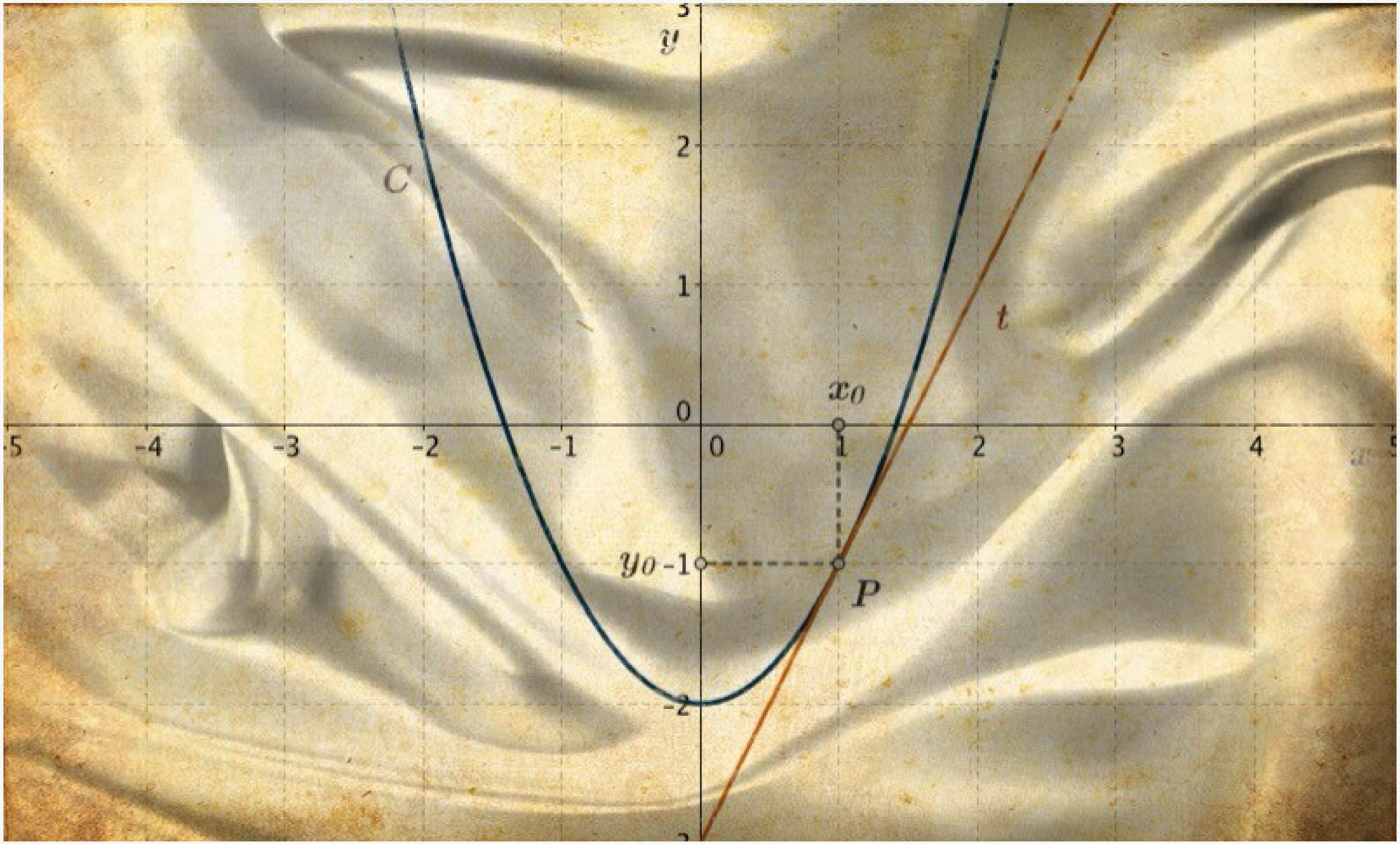


Begriff einer Tangente

Nicht alle in der Geometrie bekannten Tangentendefinitionen sind befriedigend. Z.B. wird die Tangente an einen Kreis oft als die Gerade definiert, die mit dem Kreis einen einzigen gemeinsamen Punkt hat. Diese Definition hat ganz speziellen Charakter, sie trifft nicht das Wesentliche. Wollten wir sie z.B. auf die Parabel $y = x^2$ anwenden, so würden im Koordinatenursprung beide Koordinatenachsen dieser Definition genügen. Es ist aber klar, dass nur die x-Achse eine Tangente der Parabel ist.

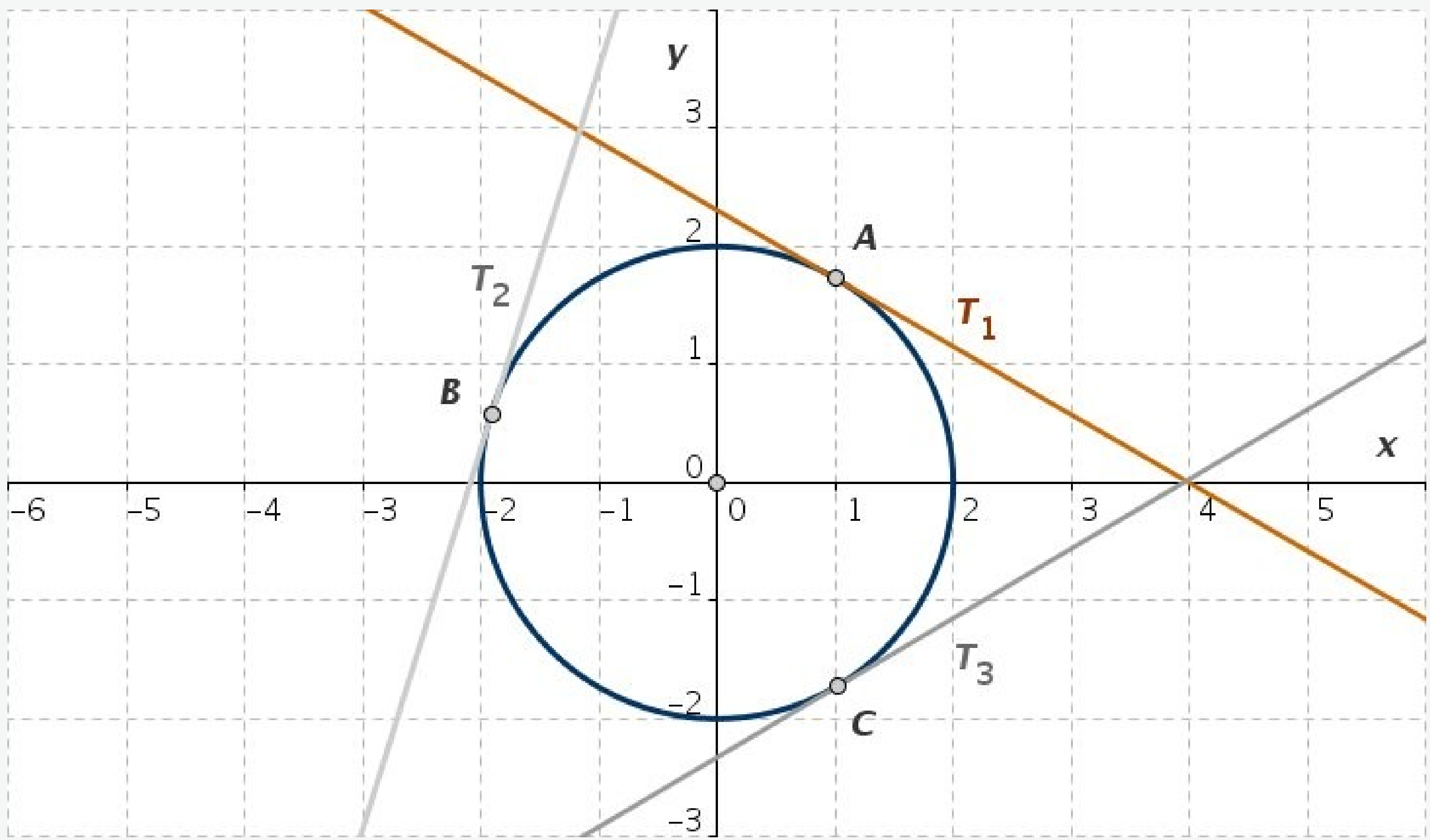


Abb. 1-1: Die an den Punkten A, B und C angezeichneten Geraden sind Tangenten. Jede Gerade hat nur einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis

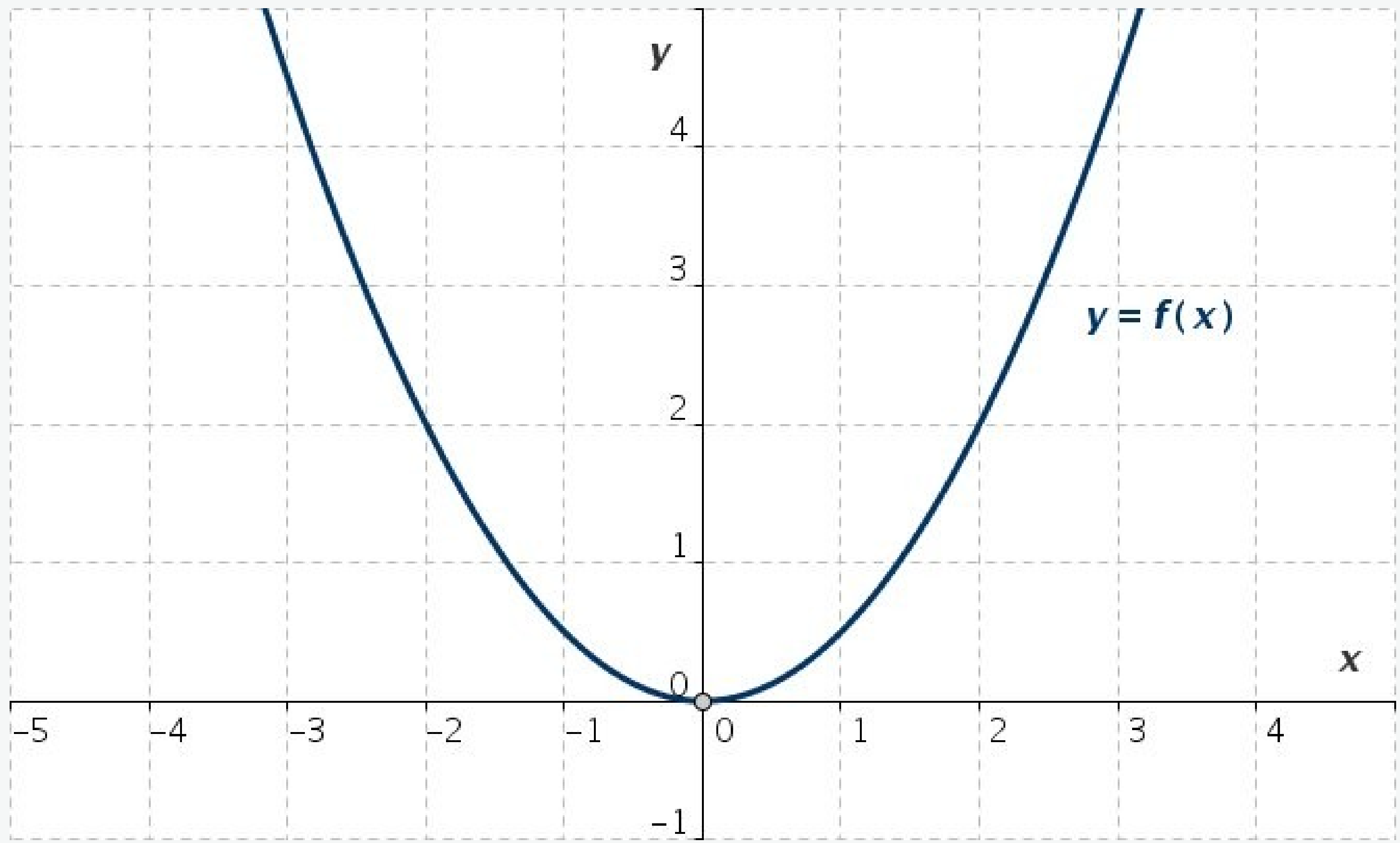


Abb. 1-2: Die beiden Koordinatenachsen haben einen gemeinsamen Punkt, den Koordinatenursprung O, mit der Parabel $y = a\,x^2$, aber nur die x-Achse ist eine Tangente der Parabel

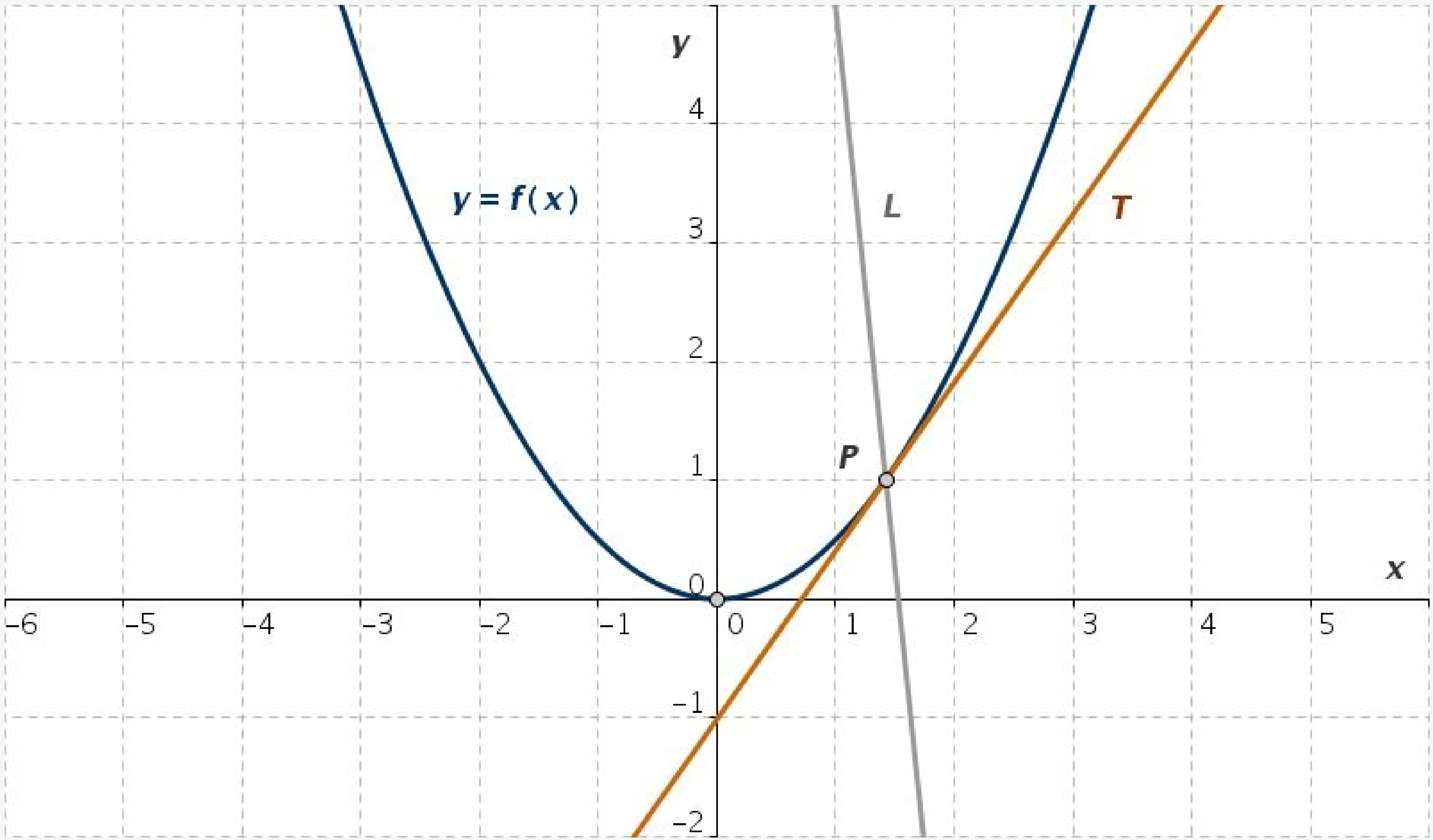


Abb. 1-3: Die beiden Geraden L und T haben einen gemeinsamen Punkt P mit der Parabel $y = 0.5\, x^2$, aber nur die Gerade T ist eine Tangente der Parabel

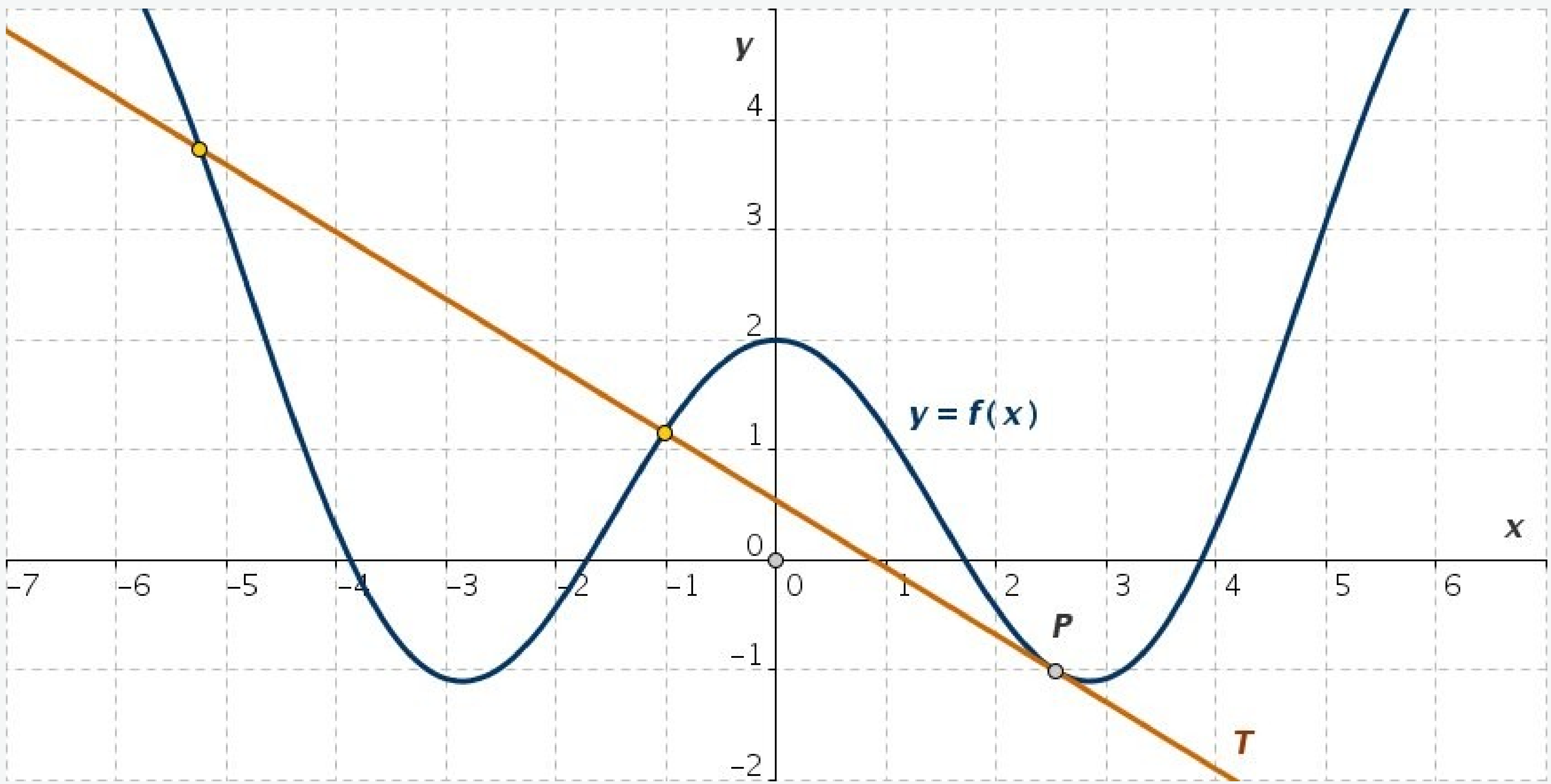


Abb. 1-4: Die Gerade T ist die Tangente der Funktion y = f (x) im Punkt P. Sie hat drei gemeinsame Punkte mit der Funktion

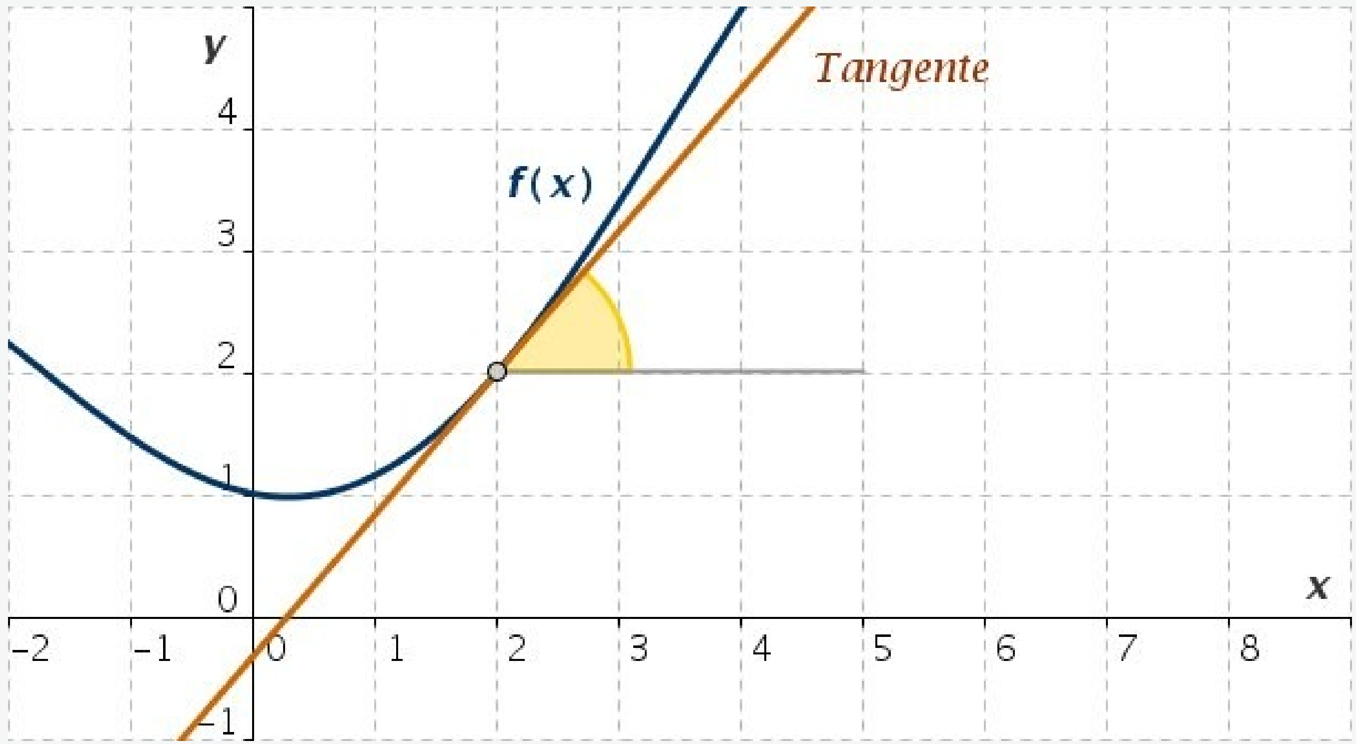
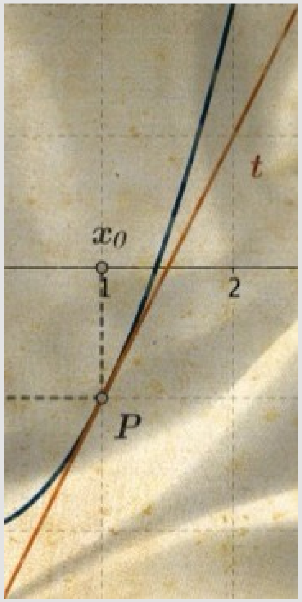


Abb. 6-1: f(x) und Tangente

Geometrische Interpretation der Ableitung:

Die Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x bedeutet, dass die Funktionskurve an dieser Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit endlicher Steigung besitzt.

Vorzeichen der Ableitung



Die Interpretation der Ableitung als Steigung kann oft erste grobe Information von ihr liefern, wie die folgenden Beispiele zeigen:

Aufgabe 1:

Ist die Ableitung von $y = f(x)$ bei x positiv oder negativ?

$a)\quad f(x) = \sin x, \qquad x = \pi,\ 2\pi$

$b)\quad f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2, \qquad x = -2,\ 2$

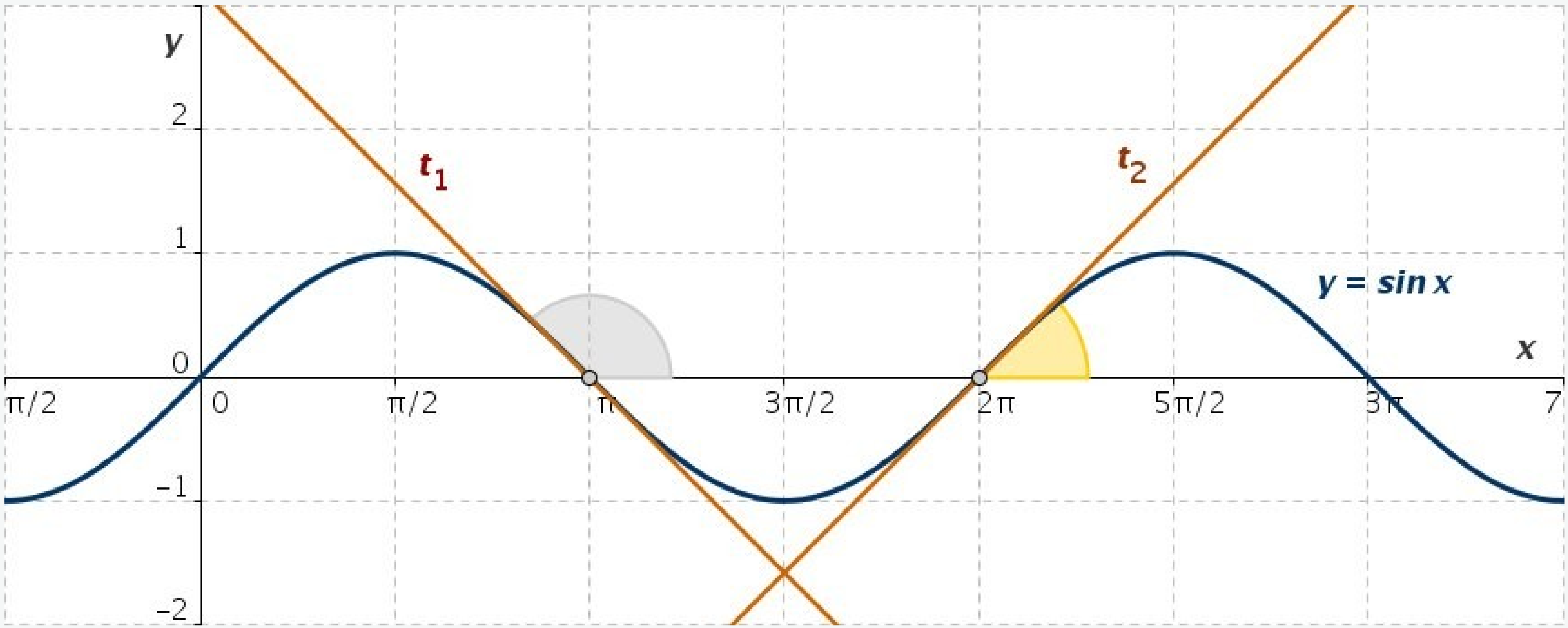


Abb. 2-1: Tangenten an $f(x) = \sin x$ bei $x = \pi$ und $x = 2\pi$

Der Graph von $f(x) = \sin x$ in *Abb. 7-1* zeigt, dass die bei $x = \pi$ gezeichnete Tangente eine negative Steigung hat. Also ist die Ableitung in diesem Punkt negativ. Umgekehrt hat die bei $x = 2\pi$ gezeichnete Tangente eine positive Steigung, die Ableitung ist also positiv.

Vorzeichen der Ableitung: Lösung 1b

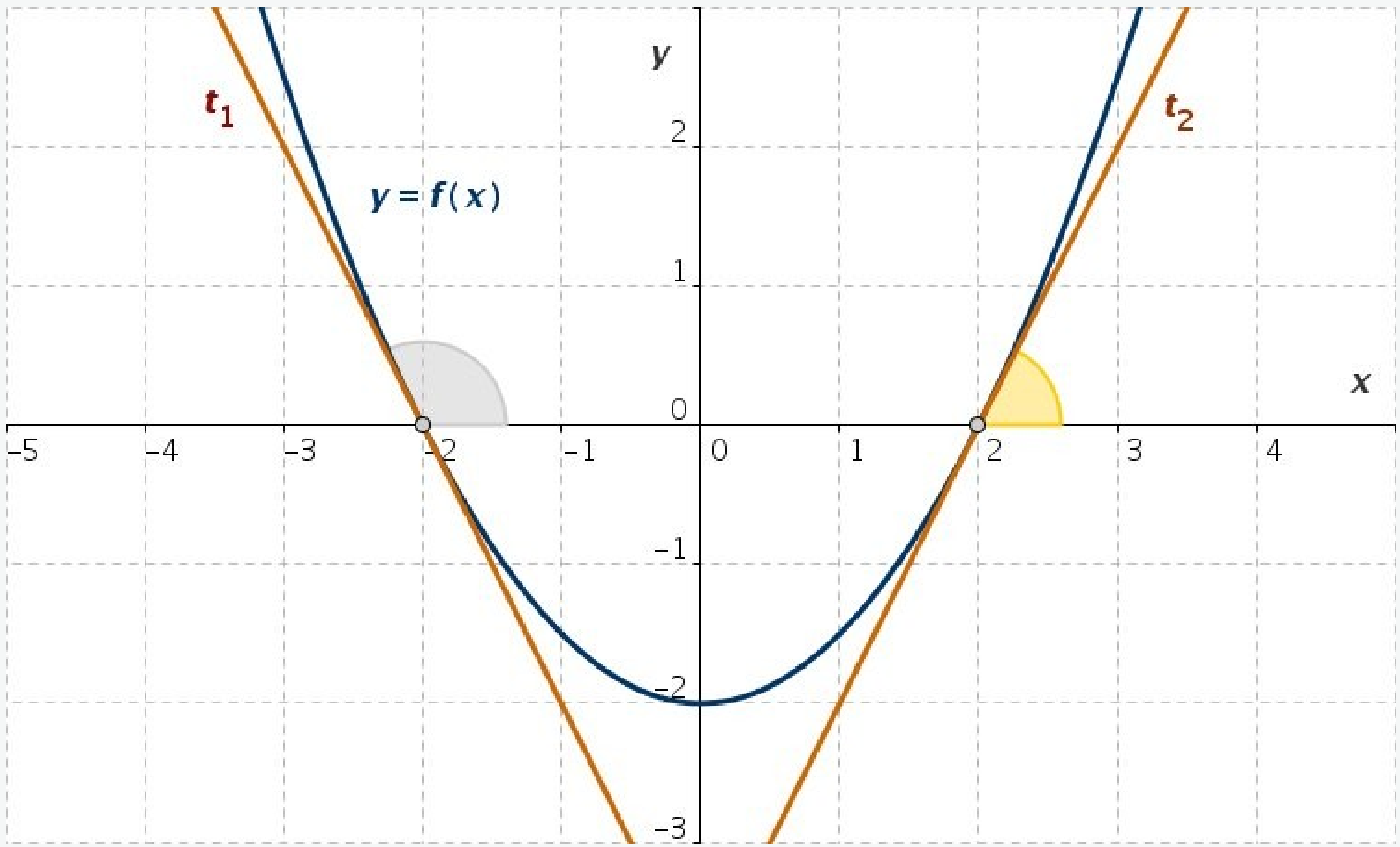


Abb. 2-2: Tangenten an $f(x) = x^2/2 - 2$ bei $x = -2$ und $x = 2$

Die Tangente bei $x = -2$ hat negative Steigung, also ist die Ableitung dort negativ. Umgekehrt ist die Ableitung bei $x = 2$ positiv.