Schritte und Steigungen

Hier möchten wir erklären, wie die Änderungsraten mit der Steigung von Kurven verknüpft werden.

Wir wollen Folgendes erreichen:

- Eine Definition der Steigung einer Kurve
- Eine genaue Vorstellung von der Bedeutung des Tangentenbegriffs
- Eine Definition der Ableitung
- Eine geometrische Interpretation der Ableitung
- Die Berechnung von Ableitungen als Grenzwerte

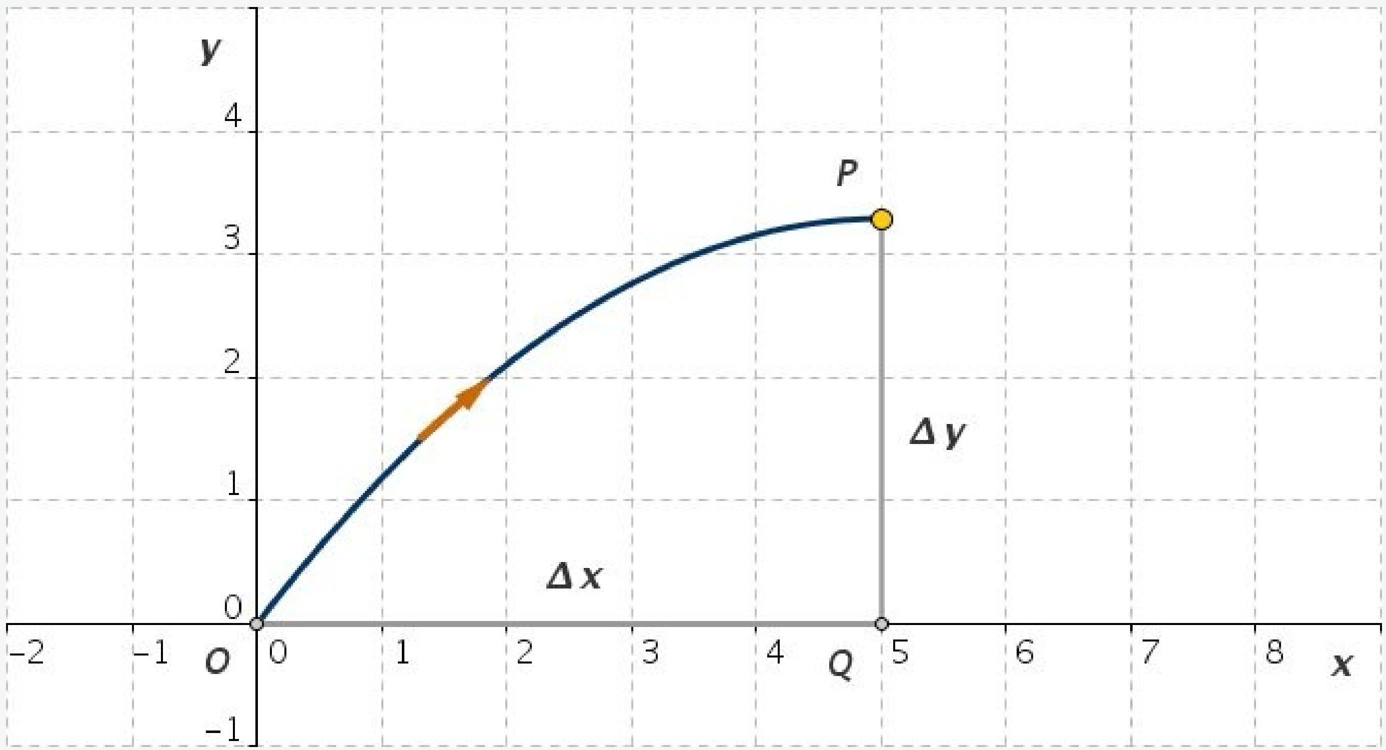

Abb. 1-1: Beschreibung der Bahn eines Punktes in kartesischen Koordinaten

Wenn sich ein Teilchen in einer Ebene von einem Punkt zu einem anderen bewegt, dann finden wir die Änderung seiner Koordinate indem wir die Koordinaten des Startpunktes von den Koordinaten des Endpunktes abziehen.

Ein Teilchen bewegt sich vom Punkt *O (0, 0)* zum Punkt *P (5, 3.3)* *(Abb. 1-1)*. Die Änderungen in den x- und y-Koordinaten sind

$$\Delta x = x_P - x_O = 5 - 0 = 5, \qquad \Delta y = y_P - y_O = 3.3 - 0 = 3.3$$

Wir nennen eine solche Änderung auch Zuwachs.

Definition:

Der Zuwachs ist die resultierende Änderung. Wenn sich ein Teilchen von A to B bewegt,

$$A = (x_A\,,\ y_A)\,, \qquad B = (x_B\,,\ y_B)$$

dann sind die Änderungen seiner Koordinaten

$$\Delta\, x = x_B - x_A\,, \qquad \Delta\, y = y_B - y_A$$

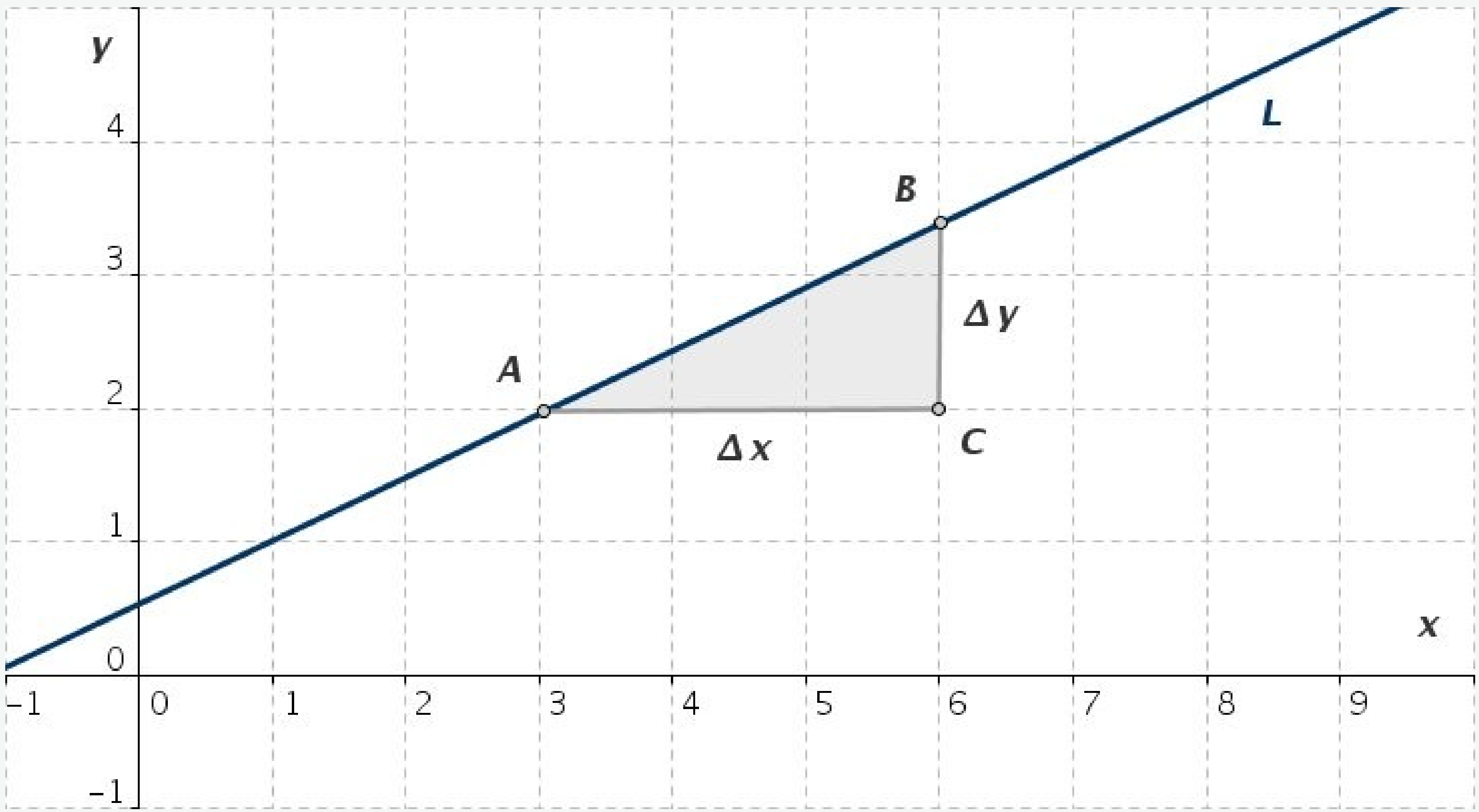

Abb. 1-2: Steigung einer nicht vertikalen Gerade

L sei eine nicht vertikale Gerade, und A und B seien Punkte auf dieser Geraden. Wenn sich ein Teilchen vom Punkt A zum Punkt B längs L bewegt, ergibt sich für die Koordinaten folgender Zuwachs:

$$A = (x_A,\ y_A), \qquad B = (x_B,\ y_B), \qquad C = (x_B,\ y_A)$$

$$\Delta y = y_B - y_A, \qquad \Delta x = x_B - x_A$$

Für alle Geraden außer den vertikalen können wir Steigungen definieren.

Definition: Die Steigung einer nicht vertikalen Gerade ist

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Angenommen wir wählen andere Punkte um die Steigung zu berechnen, z.B. *D, E* und *F* in Abb. *1-3*

$$m' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D}$$

Erhalten wir dieselbe Steigung? Ja, weil m' und m Verhältnisse entsprechender Seiten von ähnlichen Dreiecken sind. Die Steigung einer Gerade hängt nur davon ab, wie steil die Gerade ansteigt oder abfällt, welche Punkte wir für ihre Berechnung benutzen spielt keine Rolle.

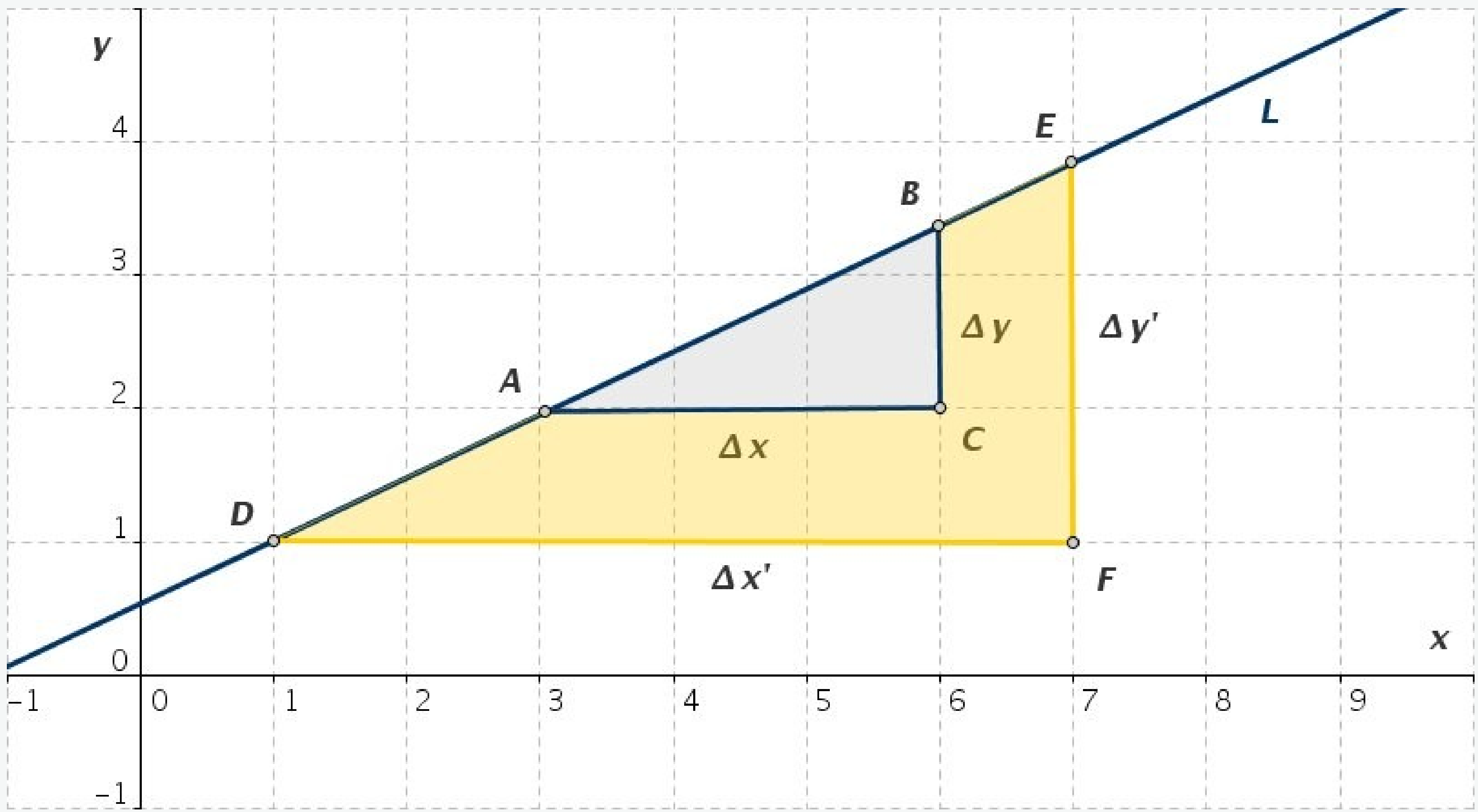

Abb. 1-3: Steigung einer nicht vertikalen Geraden

$$m = m\,', \qquad m = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \qquad m\,' = \frac{\Delta\, y\,'}{\Delta\, x\,'} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D}$$

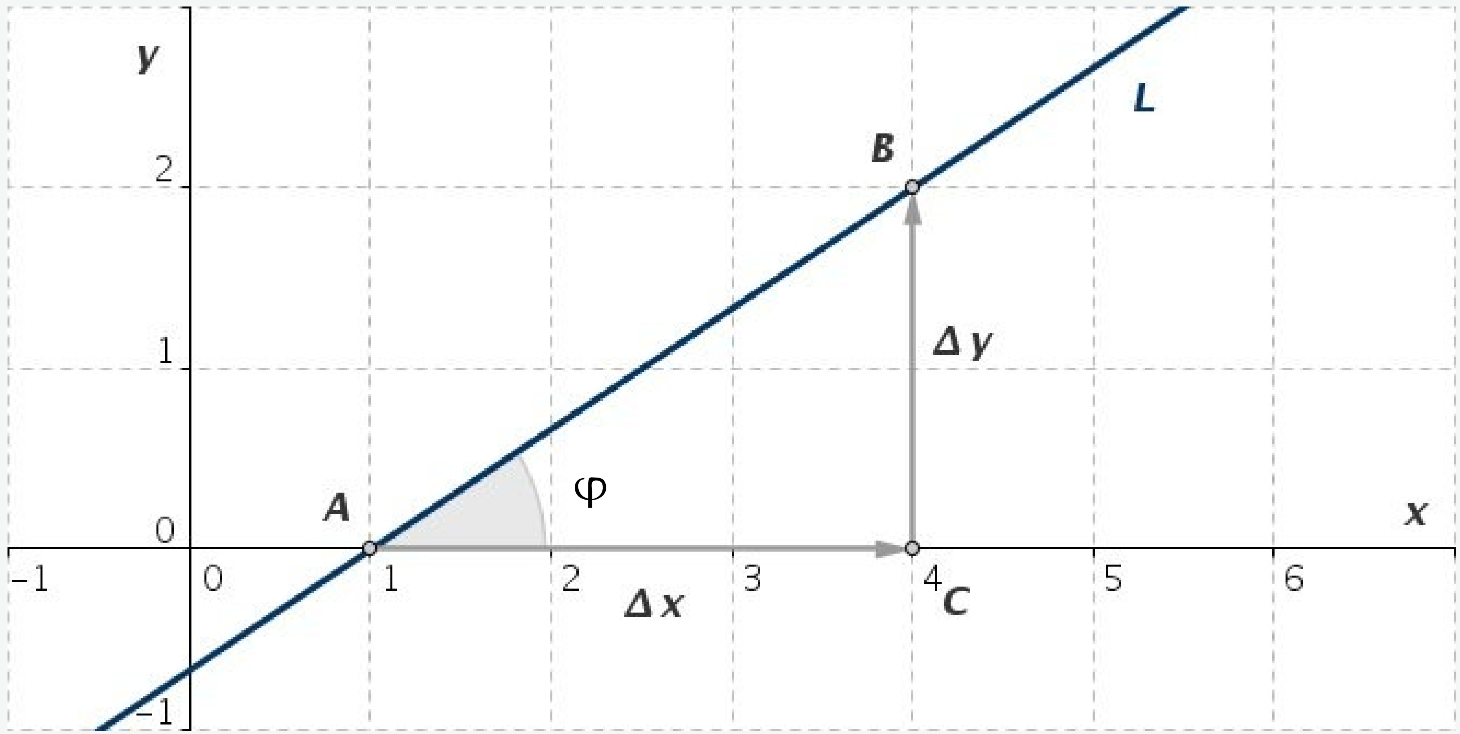

Abb. 2-3: Zum Begriff der Steigung

Die Steigung einer nicht vertikalen Geraden ist der Tangens ihres Neigungswinkels

$$m = \frac{\Delta\ y}{\Delta\ x} = \tan \varphi$$

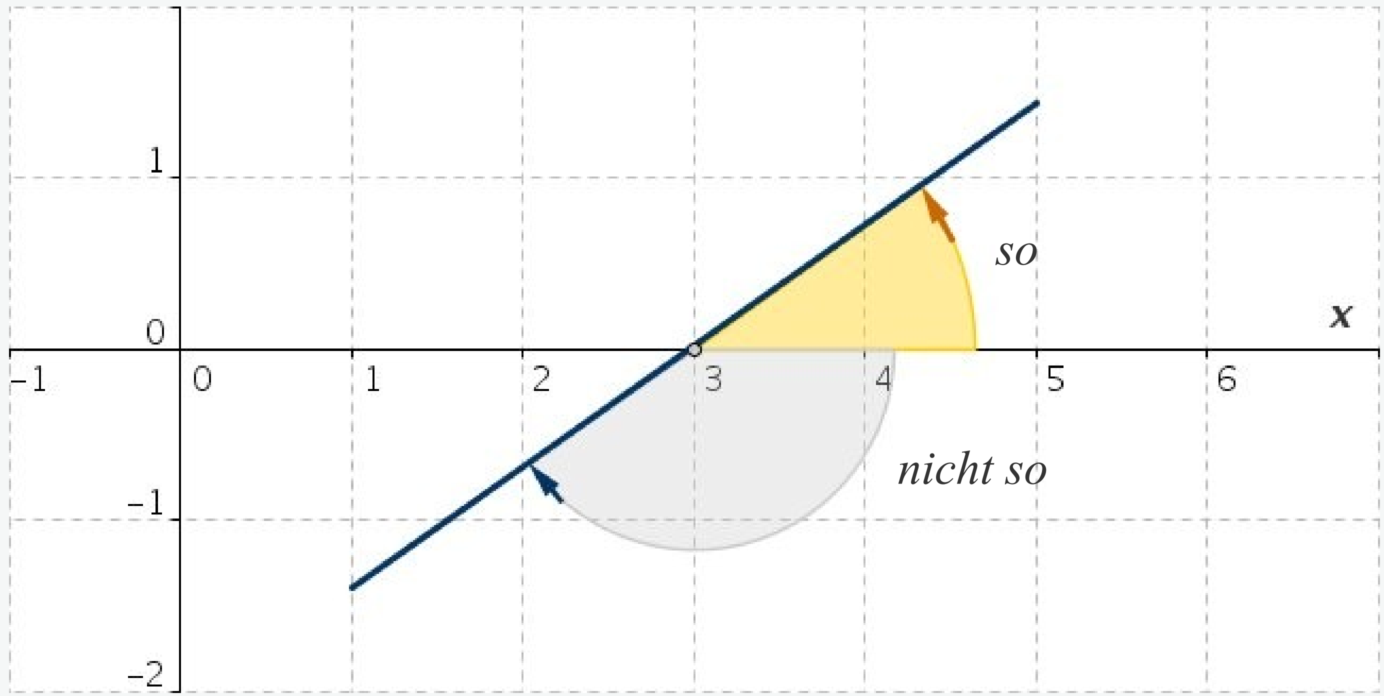

Abb. 2-1: Neigungswinkel werden von der x-Achse aus entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen

Der Neigungswinkel einer Geraden, welche die x-Achse schneidet, ist der kleinste Winkel am Schnittpunkt, wenn wir von der x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn messen (Abb. *1-4, 1-5*). Der Neigungswinkel einer horizontalen Gerade ist $0°$. Der Neigungswinkel φ einer Geraden kann also die Werte

$$0^\circ \leqslant \varphi < 180^\circ$$

annehmen.

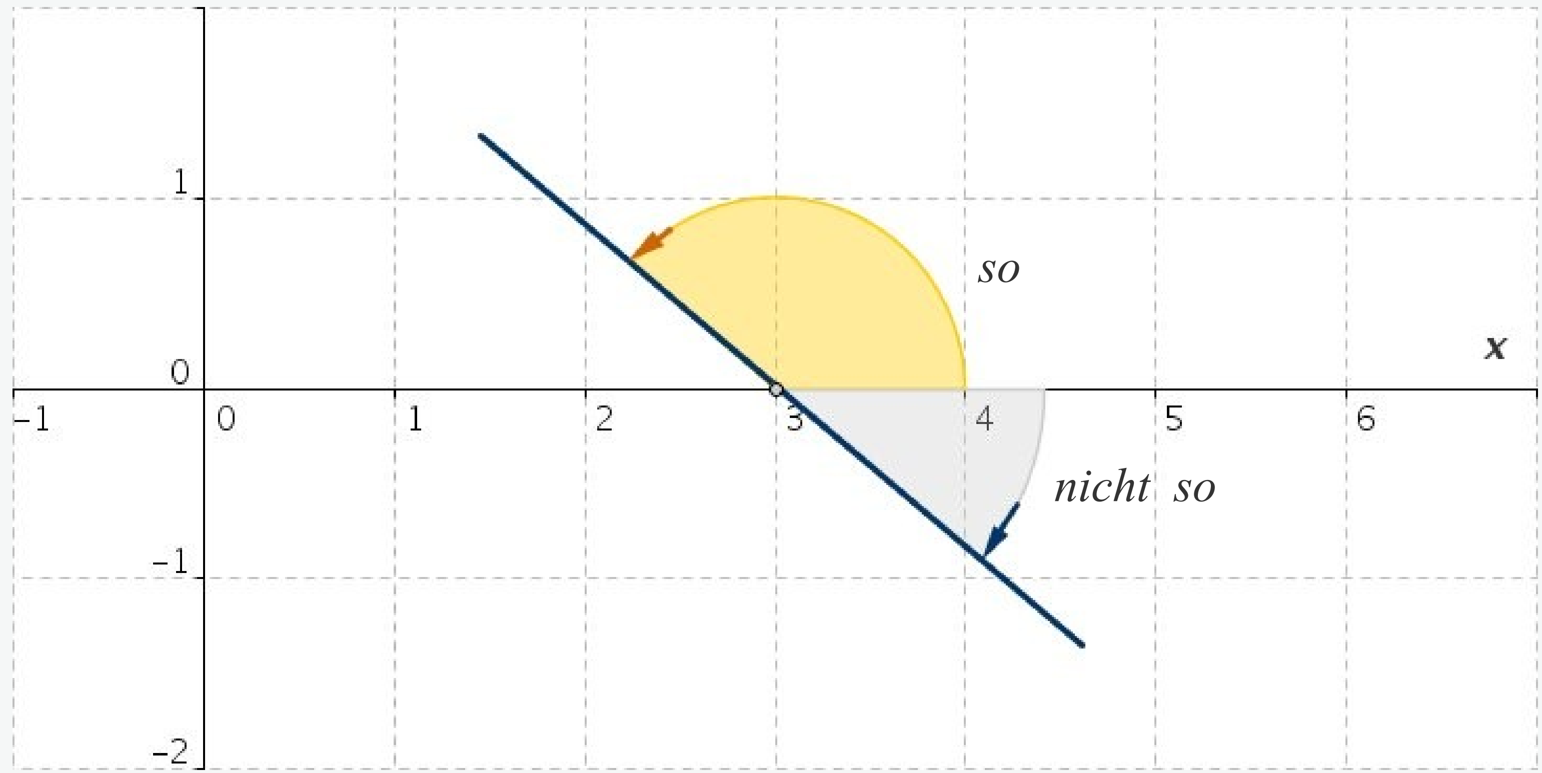

Abb. 2-2: Neigungswinkel werden von der x-Achse aus entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen