Regel von Bernoulli – de l'Hospital

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Wenn wir den Grenzwert $x = -1$ einsetzen, ergibt sich der unbestimmte Ausdruck 0/0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Wenn wir den Grenzwert $x = 0$ einsetzen, ergibt sich ebenfalls der unbestimmte Ausdruck 0/0.

Den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \qquad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

kann man berechnen, indem man den Ausdruck durch algebraische Umformungen vereinfacht und danach den Grenzwert bestimmt

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

Den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{2x} \qquad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

kann man nicht berechnen, indem man den Ausdruck algebraisch umformt, da im Zähler eine transzendente und im Nenner eine algebraische Funktion steht. Um solche Grenzwerte zu berechnen, braucht man eine andere Methode.

Johann Bernoulli (1667-1748)

Der Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli hat erkannt, dass man Grenzwerte mithilfe von Ableitungen berechnen kann. Der französische Mathematiker Marquis de l'Hospital hat ihm diese Idee abgekauft und unter seinem eigenen Namen veröffentlicht.

$f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung U von $x = a$ (aber nicht notwendig in $x = a$ selbst) differenzierbar, und $g'(x) \neq 0$ in jedem Punkt von U. Ist dann

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

so gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bei der Anwendung der Regel werden Zähler und Nenner also getrennt abgeleitet. (Keine Quotientenregel!)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

Aufgabe 1:

$$a)\ \lim_{x \to 0} \frac{5x - \sin x}{2x}, \qquad b)\ \lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x},$$

$$c)\ \lim_{x \to 0} \frac{3(x - \sin x)}{x^3}, \qquad d)\ \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{x^2}$$

Aufgabe 2:

$$a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}, \qquad b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}, \qquad c)\ \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{5x - \sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(5x - \sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{5 - \cos x}{2} = 2$$

b) $$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{(e^x - e)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to 1} x e^x = e$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{3(x - \sin x)}{x^3} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} =$$

$$= 3 \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$ immer noch 0/0

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} =$$ immer noch 0/0

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}$$ nicht mehr 0/0, der Grenzwert ist bestimmt

$$d)\ \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0+\delta} \frac{2 \cos x}{2\, x} = \lim_{x \to 0+\delta} \frac{\cos x}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0-\delta} \frac{2 \cos x}{2\, x} = \lim_{x \to 0-\delta} \frac{\cos x}{x} = -\infty$$

In diesem Beispiel sind die Grenzwerte von links und von rechts verschieden.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

Hier wurde die Regel von Bernoulli-l'Hospital 2 mal nacheinander angewendet.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Durch Ableiten entstehen zwei Ausdrücke:

$$\frac{f^{2n+1}(x)}{g^{2n+1}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad \frac{f^{2n}(x)}{g^{2n}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Das bedeutet, dass hier die Regel von Bernoulli-l'Hospital nicht weiterhilft. Der Grenzwert kann aber auch so bestimmt werden:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

Die Grenzwertregel von Bernoulli-l'Hospital kann man auch anwenden, wenn andere unbestimmte Ausdrücken entstehen, wie zum Beispiel

$$0 \cdot \infty \quad \text{oder} \quad \infty \cdot 0$$

1) $f(x) = u(x) \cdot v(x), \qquad \lim\limits_{x \to a} u(x) \cdot v(x) = 0 \cdot \infty$

elementare Umformung: $\quad f(x) = u(x) \cdot v(x) = \dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$

2) $f(x) = u(x) - v(x), \qquad \lim\limits_{x \to a} u(x) - v(x) = \infty - \infty$

elementare Umformung: $\quad \lim\limits_{x \to a} u(x) - v(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{u}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{v}} = \dfrac{\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{u}}{\dfrac{1}{u\ v}}$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

Aufgabe 3:

$$a)\ \lim_{x \to \infty} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \qquad b)\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\cos(0)=1$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)= \qquad (\infty-\infty)$$

Der Grenzwert liefert einen unbestimmten Ausdruck ∞ - ∞. Die Regel von Bernoulli-l'Hospital kann man nicht unmittelbar anwenden. Der Ausdruck wird umgeformt:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+2}=\frac{1}{2}$$