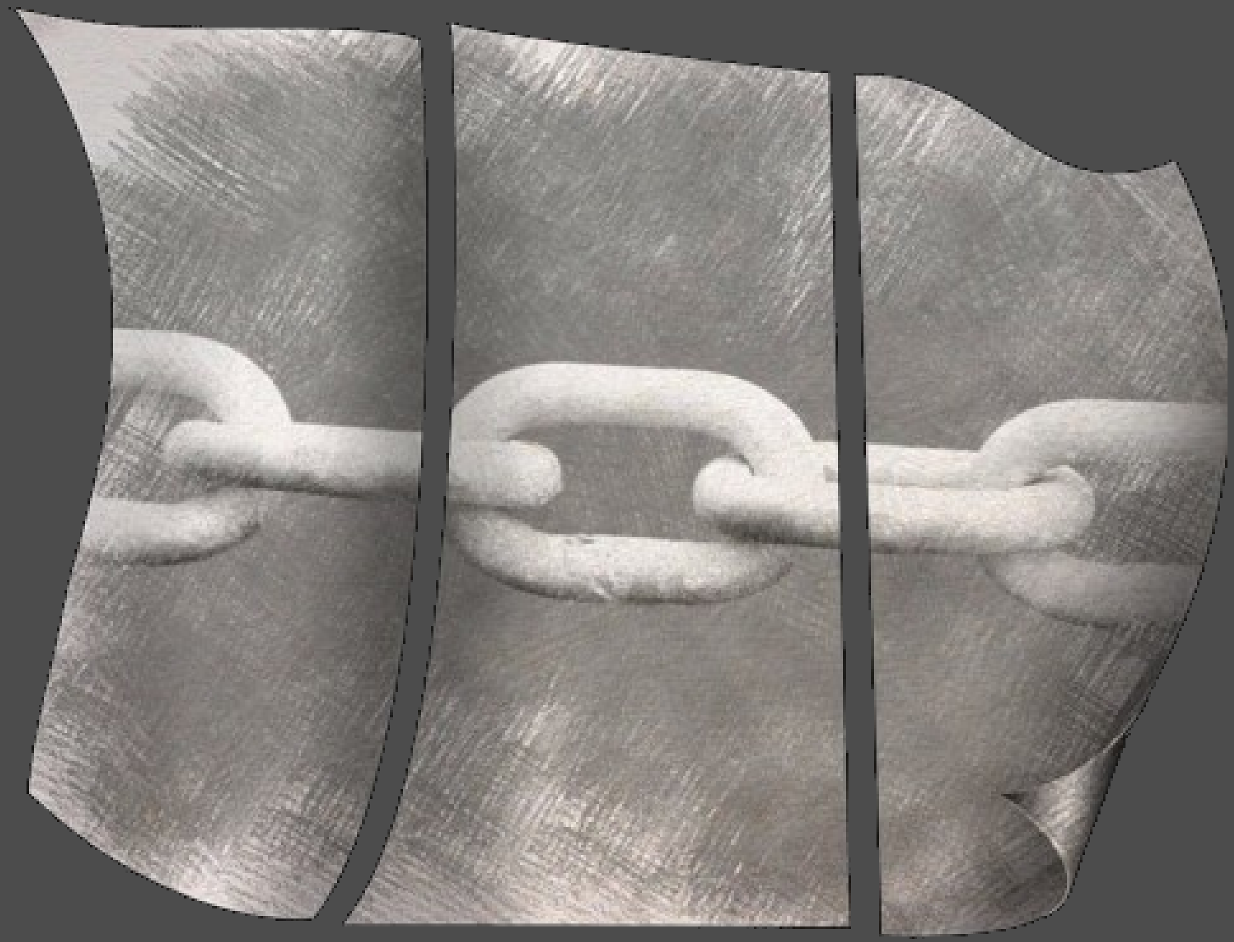
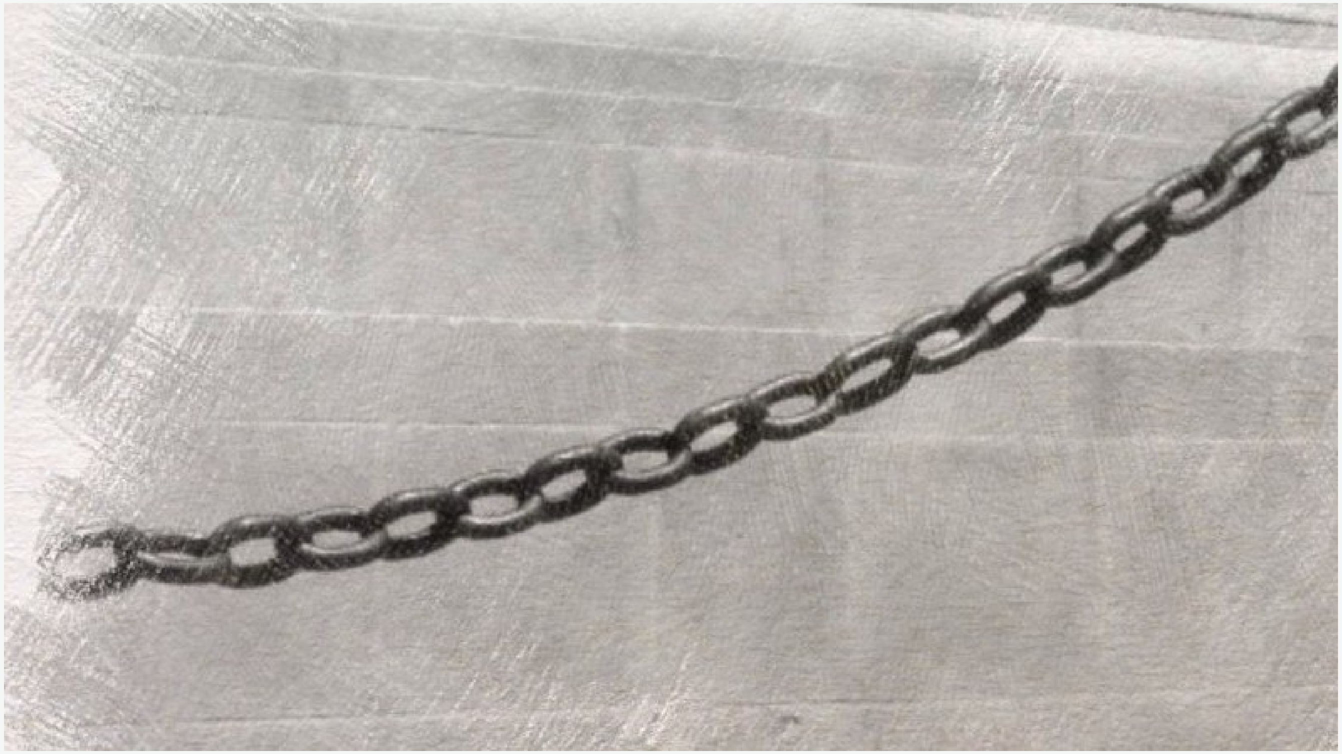


Kettenregel



Wie bestimmt man Ableitungen folgender Funktionen?

$$f(x) = \cos^2 x\,, \qquad g(x) = \cos^5 x\,, \qquad h(x) = \sqrt[4]{\cos x}$$

Man kann die Funktion $f(x)$ mit Hilfe der Produktregel ableiten, für die Funktion $g(x)$ ist diese Vorgehensweise schon sehr aufwendig, und für $h(x)$ ist die Produktregel überhaupt nicht verwendbar.

Man braucht eine neue Ableitungsregel.

http://www.flickr.com/photos/9184647@N02/2062425056/

Abb. 1-1: Umformung der Funktion $y = f(x)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution

Mit Hilfe einer geeigneter Substitution $u = u(x)$ werden Funktionen in einfacher gebaute und möglichst elementare Funktionen überführt.

$$y = f(x) \longrightarrow u = u(x) \longrightarrow y = F(u)$$

Substitution

$y = F(u)$ – äußere Funktion

$u = u(x)$ – innere Funktion

Kettenregel:

Die Ableitung einer zusamengesetzten (verketteten) Funktion $y = F(u(x)) = f(x)$ erhält man als Produkt der äußeren und inneren Ableitung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$\frac{dy}{du}$ – äußere Ableitung, $\frac{du}{dx}$ – innere Ableitung

$y = f\,(x) \qquad \longrightarrow \qquad y = F\,(u)$

$y = \cos^2 x \qquad \longrightarrow \qquad y = u^2$

$y = \cos^4 x \qquad \longrightarrow \qquad y = u^4$

$y = \sqrt[4]{\cos x} \qquad \longrightarrow \qquad y = u^{\frac{1}{4}}$

Abb. 1-2: Umformungen von Funktionen mit Hilfe der Substitution $u = \cos x$

Umformungen von Funktionen

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad u = u(x) \quad \rightarrow \quad y = F(u)$$

$$y = \sin(3x) \quad \rightarrow \quad u = 3x \quad \rightarrow \quad y = \sin u$$

$$y = (x^2 + 2)^5 \quad \rightarrow \quad u = x^2 + 2 \quad \rightarrow \quad y = u^5$$

$$y = \sqrt{\frac{2x - 1}{x + 1}} \quad \rightarrow \quad u = \frac{2x - 1}{x + 1} \quad \rightarrow \quad y = u^{1/2}$$

$$y = \ln(x^3 - 7) \quad \rightarrow \quad u = x^3 - 7 \quad \rightarrow \quad y = \ln u$$

$$y = \sin(x^3 - 2x)$$

Hier liegt keine reine Sinusfunktion vor, sondern eine, in deren Argument ein Polynom steht. In solchen Fällen geht man am besten folgendermaßen vor:

- Man zerlegt die gegebene Funktion in einfachere Funktionen, möglichst in Grundfunktionen, die man mit Hilfe bekannter Differentiationsregeln ableiten kann

$$y = \sin u, \qquad u = x^3 - 2x$$

- Man bildet äußere und innere Ableitungen

$$\frac{dy}{du} = \cos u, \qquad \frac{du}{dx} = 3x^2 - 2$$

- Zuletzt wird das Produkt der Einzelableitungen gebildet

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot (3x^2 - 2) = (3x^2 - 2)\cos(x^3 - 2x)$$

$$y = \ln\left[\sin\left(x^2 + 3\right)\right]$$

1. Substitution: $u = u(x) = x^2 + 3, \qquad y = \ln(\sin u)$

Diese Funktion ist nicht elementar differenzierbar. Man braucht eine weitere Substitution:

2. Substitution: $v = v(u) = \sin u\,, \qquad y = \ln v$

$$\Rightarrow \quad y = \ln v\,, \quad v = \sin u\,, \quad u = x^2 + 3$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \cos u \cdot (2x) = \frac{\cos u}{\sin u} \cdot (2x) =$$

$$= 2x \cot u = 2x \cot\left(x^2 + 3\right)$$

$$y' = \frac{d}{dx} \ln\left[\sin\left(x^2 + 3\right)\right] = 2x \cot\left(x^2 + 3\right)$$

Kettenregel: Aufgabe 1

Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen

a) $f(x) = (x + 3)^3, \qquad g(x) = (x - 6)^5$

b) $f(x) = (2x - 5)^4, \qquad g(x) = (5x - 11)^{12}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 2)^3}, \qquad g(x) = \dfrac{2}{(x + 12)^7}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{(2x - 3)^5}, \qquad g(x) = \dfrac{2}{3(4x + 1)^3}$

e) $f(x) = \sqrt{x + 3}, \qquad g(x) = \sqrt{x - 9}$

f) $f(x) = \sqrt{2x - 6}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x + 4}, \qquad g(x) = \sqrt[4]{2x + 1}$

$$a)\quad f(x) = (x+3)^3, \qquad f'(x) = 3(x+3)^2$$

$$g(x) = (x-6)^5, \qquad g'(x) = 5(x-6)^4$$

$$b)\quad f(x) = (2x-5)^4, \qquad f'(x) = 4(2x-5)^3 \cdot 2 = 8\,(2x-5)^3$$

$$g(x) = (5x-11)^{12}, \qquad g'(x) = 12\,(5x-11)^{11} \cdot 5 = 60\,(5x-11)^{11}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{1}{(x-2)^3} = (x-2)^{-3}, \qquad f'(x) = -3(x-2)^{-4} = -\frac{3}{(x-2)^4}$$

$$g(x) = \frac{2}{(x+12)^7} = 2\,(x+12)^{-7}, \qquad g'(x) = -14(x+12)^{-8} = -\frac{14}{(x+12)^8}$$

$$d)\quad f(x) = \frac{3}{(2x-3)^5} = 3\,(2x-3)^{-5},$$

$$f'(x) = -15\,(2x-3)^{-6} \cdot 2 = -30\,(2x-3)^{-6} = -\frac{30}{(2x-3)^6}$$

$$g(x) = \frac{2}{3(4x+1)^3} = \frac{2}{3}\,(4x+1)^{-3},$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}\,(4x+1)^{-4} \cdot (-3) \cdot 4 = -8\,(4x+1)^{-4} = -\frac{8}{(4x+1)^4}$$

e) $f(x) = \sqrt{x+3} = (x+3)^{1/2}$, $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

$g(x) = \sqrt{x-9} = (x-9)^{1/2}$, $\qquad g'(x) = \frac{1}{2}(x-9)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x-9}}$

f) $f(x) = \sqrt{2x-6} = (2x-6)^{1/2}$, $\qquad f(x) = \frac{2}{2}(2x-6)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2x-6}}$

$g(x) = \sqrt{x^2+4} = (x^2+4)^{1/2}$, $\qquad g'(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}\,2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x+4} = (x+4)^{1/3}$, $\qquad f'(x) = \frac{1}{3(x+4)^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}$

$g(x) = \sqrt[4]{2x+1}$, $\qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$

Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen

$a)\quad f(x) = 5\cos(3x), \qquad g(x) = \cos(\sqrt{x})$

$b)\quad f(x) = \sin(x^2 + 3), \qquad g(x) = \sin(x^3 - \sqrt{2x})$

$c)\quad f(x) = \ln(x^4 + 5), \qquad g(x) = \ln(x^3 - 2x + 3)$

$d)\quad f(x) = \left(\dfrac{x^4 + 3x}{x^2}\right)^3, \qquad g(x) = \left(\dfrac{x^3 + 2x}{x}\right)^4$

$e)\quad f(x) = \sqrt{4x + \sin x}, \qquad g(x) = \sqrt{7x + \cos x}$

$f)\quad f(x) = \sqrt{2x - \sin(3x)}, \qquad g(x) = \sqrt{x^3 + \cos(2x)}$

$g)\quad f(x) = (x + 2)\sqrt{2x - 3}, \qquad g(x) = \sqrt[5]{x^2 + 7x}$

$a)\quad f(x) = 5\cos(3x), \qquad f'(x) = -15\sin(3x)$

$$g(x) = \cos(\sqrt{x}), \qquad g'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$b)\quad f(x) = \sin(x^2 + 3), \qquad f'(x) = 2x\cos(x^2 + 3)$

$$g(x) = \sin(x^3 - \sqrt{2x}), \qquad g'(x) = \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \cdot \cos(x^3 - \sqrt{2x})$$

$$c)\quad f(x) = \ln(x^4 + 5), \qquad f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 5}$$

$$g(x) = \ln(x^3 - 2x + 3), \qquad g'(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 3}$$

$d)\quad f(x) = (x^2 + 3x^{-1})^3$

$$f'(x) = 3(x^2 + 3x^{-1})^2(2x - 3x^{-2}) = 3\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^2\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)$$

$$g(x) = \left(\frac{x^3 + 2x}{x}\right)^4, \qquad g'(x) = 8x\,(x^2 + 2)^3$$

e) $f(x) = \sqrt{4x + \sin x}\,, \qquad f'(x) = \dfrac{4 + \cos x}{2\sqrt{4x + \sin x}}$

$g(x) = \sqrt{7x + \cos x}\,, \qquad g'(x) = \dfrac{7 - \sin x}{2\sqrt{7x + \cos x}}$

f) $f(x) = \sqrt{2x - \sin(3x)}\,, \qquad f'(x) = \dfrac{2 - 3\cos(3x)}{2\sqrt{2x - \sin(3x)}}$

$g(x) = \sqrt{x^3 + \cos(2x)}\,, \qquad g'(x) = \dfrac{3x^2 - 2\sin(2x)}{2\sqrt{x^3 + \cos(2x)}}$

g) $f(x) = (x + 2)\sqrt{2x - 3}\,, \qquad f'(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{2x - 3}}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^2 + 7x} = \left(x^2 + 7x\right)^{1/5}, \qquad g'(x) = \dfrac{2x + 7}{5\left(x^2 + 7x\right)^{4/5}}$


KETTEN


REGEL