Ableitungsregeln

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{R}$$

$$(\sin x)' = \cos x\,, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = (\ln a)\,a^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad x,\ a > 0$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Faktorregel: $\quad y = C \cdot f(x) \qquad y' = C \cdot f'$

Summenregel:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \qquad y' = f'_1 + f'_2 + \ldots + f'_n$$

Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen

Aufgabe 1:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$ b) $y = x^{12} - 7x^3 + 5x$

c) $y = \dfrac{x^8}{4} - \dfrac{x^6}{3} + \dfrac{x^4}{2},$ d) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$

e) $y = x^2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{6}{x^4}$

Aufgabe 2:

a) $y = 2\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x},$ b) $y = 4x\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$

c) $y = \sqrt{x} - \dfrac{4x}{\sqrt{x}} + 9\sqrt[3]{x^2},$ d) $y = x\sqrt{x} - \dfrac{4x^2}{\sqrt[3]{x}} - 7x\sqrt[4]{x^3}$

$a)\ y' = 3x^2 - 10x + 3$

$b)\ y' = 12x^{11} - 21x^2 + 5$

$c)\ y' = 2x^7 - 2x^5 + 2x^3$

$$d)\ y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x^{-1} - \frac{x^{-2}}{2}$$

$$y' = x^3 - x + x^{-2} + x^{-3} = x^3 - x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$e)\ y = x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} = x^2 - 2x^{-3} + 6x^{-4}$$

$$y' = 2x + 6x^{-4} - 24x^{-5} = 2x + \frac{6}{x^4} - \frac{24}{x^5}$$

Faktorregel, Summenregel: Lösung 2

a) $y = 2\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 2x^{1/2} - 8x^{1/4}$

$$y' = x^{-1/2} - 2x^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$$

b) $y = 4x\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} = 4x^{3/2} - 6x^{1/3}$

$$y' = 6x^{1/2} - 2x^{-2/3} = 6\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$$

c) $y = \sqrt{x} - \dfrac{4x}{\sqrt{x}} + 9\sqrt[3]{x^2} = -3x^{1/2} + 9x^{2/3}$

$$y' = -\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

d) $y = x\sqrt{x} - \dfrac{4x^2}{\sqrt[3]{x}} - 7x\sqrt[4]{x^3} = x^{3/2} - 4x^{5/3} - 7x^{7/4}$

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{49}{4}\sqrt[4]{x^3}$$

Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen

Aufgabe 3:

$a)\ y = 3 \sin x - 4 \cos x$

$b)\ y = x^5 - 2 \cos x + 3 e^x + \ln x$

$c)\ y = 3 \tan x - \cot x$

$d)\ y = 2 \arcsin x - x^3$

Aufgabe 4:

$f(x) = \ln(x^7), \qquad g(x) = 8 \ln(\sqrt[4]{x}), \qquad h(x) = \ln(e^2 x^3)$

Lösung 3:

$$a)\ y' = 3\cos x + 4\sin x, \qquad b)\ y' = 5x^4 + 2\sin x + 3e^x + \frac{1}{x}$$

$$c)\ y' = \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}, \qquad d)\ y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 3x^2$$

Lösung 4:

$$f(x) = \ln(x^7) = 7\ln(x), \qquad f'(x) = \frac{7}{x}$$

$$g(x) = 8\ln(\sqrt[4]{x}) = 8\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = 2\ln x, \qquad f'(x) = \frac{2}{x}$$

$$h(x) = \ln(e^2 x^3) = 2 + 3\ln x, \qquad h'(x) = \frac{3}{x}$$

Prüfen Sie mithilfe geeigneter Funktionen, welche der beiden Varianten als Ableitungsregel für eine Produktfunktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ stimmen kann:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Variante 1: $f'(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v'$

Variante 2: $f'(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

Hinweis:

Die Funktionen sollen so gewählt werden, dass das Ergebnis für die Ableitung auch mit anderen jetzt schon bekannten Regeln überprüft werden kann.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = x^3 \, (3x^2 - 5x)$$

$$u(x) = x^3, \qquad v(x) = 3x^2 - 5x$$

Variante 1:

$$f'(x) = u' \cdot v' = (x^3)' \, (3x^2 - 5x)' = 3x^2 \, (6x - 5) = 18x^3 - 15x^2$$

Variante 2:

$$f'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u = 3x^2 \, (3x^2 - 5x) + x^3 \, (6x - 5) =$$

$$= 9x^4 - 15x^3 + 6x^4 - 5x^3 = 15x^4 - 20x^3$$

Überprüfung mithilfe der Summen- und Faktorregel:

$$f(x) = x^3 \, (3x^2 - 5x) = 3x^5 - 5x^4$$

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$$

Die zweite Variante für die Ableitungsregel einer Produktfunktion ist richtig, die erste ist falsch.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^4} = (3x^2 - 2) \cdot x^{-4}$$

$$u(x) = 3x^2 - 2, \qquad v(x) = x^{-4}$$

Variante 1:

$$f'(x) = u' \cdot v' = (3x^2 - 2)' \, (x^{-4})' = -4 \cdot 6x \; x^{-5} = -24\, x^{-4} = -\frac{24}{x^4}$$

Variante 2:

$$f'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u = 6x \cdot x^{-4} + (3x^2 - 2) \cdot (-4)\, x^{-5} =$$

$$= 6x^{-3} - 4 \cdot (3x^2 - 2)\, x^{-5} = -6x^{-3} + 8\; x^{-5} = -\frac{6}{x^3} + \frac{8}{x^5}$$

Überprüfung mithilfe der Summen- und Faktorregel:

$$f(x) = (3x^2 - 2) \cdot x^{-4} = 3\; x^{-2} - 2\; x^{-4}$$

$$f'(x) = -6x^{-3} + 8\; x^{-5} = -\frac{6}{x^3} + \frac{8}{x^5}$$

Die zweite Variante ist richtig.

Produktregel: algebraischer Beweis

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

Die Ergänzung $u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)$ ändert den Differentialquotienten von f nicht.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}}}_{u'(x)} \cdot v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \underbrace{\boxed{\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}}_{v'(x)} =$$

$$= u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\boxed{f'(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u}$$

Produktregel: $y = u \cdot v \qquad y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

$$u = u(x), \qquad v = v(x)$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen mit Hilfe der Produktregel

$a)\quad f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$

$b)\quad f(x) = 2 \sin x \cos x$

$c)\quad f(x) = x \ln x$

$d)\quad f(x) = \sin^2 x$

$e)\quad f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$f)\quad f(x) = \sqrt{x} \cos x$

$$a)\quad f\,'(x) = 5\,x^4 + 3\,x^2 - 2\,x$$

$$b)\quad f\,'(x) = 2\,\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 2\,\cos 2\,x$$

$$c)\quad f\,'(x) = 1 + \ln x$$

$$d)\quad f\,'(x) = 2\,\sin x\,\cos x = \sin(2\,x)$$

$$e)\quad f\,'(x) = 0, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$f)\quad f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(\cos x - 2\,x\,\sin x)$$

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen auf zwei verschiedenen Wegen, und entscheiden Sie, welcher Weg der einfachere ist:

$a)\ f(x) = x(x^3 + 2x)$, $\qquad b)\ f(x) = x^4 \cdot x^5$

$c)\ f(x) = (x^3 - 5x)(x^2 + 7)$, $\qquad d)\ f(x) = (3x - 2)^2$

$e)\ f(x) = \dfrac{12 - 3x^2}{x}$, $\qquad f)\ f(x) = x \cdot \sqrt{x}$, $\qquad g)\ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen

$a)\quad y = (2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x}) + x$

$b)\quad y = (3 - 2\sqrt[3]{x})(3 + 2\sqrt[3]{x})$

$c)\quad y = (3 - 2x)^2 (3 + 2x)^2 + 4x^4$

$d)\quad y = (1 - \sqrt{x})^2 (1 + \sqrt{x})^2 + x^3$

$$a)\quad y = (2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x}) + x = 4, \qquad y' = 0$$

$$b)\quad y = (3 - 2\sqrt[3]{x})(3 + 2\sqrt[3]{x}) = 9 - 4x^{2/3}$$

$$y' = -\frac{8}{3}x^{-1/3} = -\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$c)\quad y = (3 - 2x)^2(3 + 2x)^2 + 4x^4 = ((3 - 2x)(3 + 2x))^2 + 4x^4 =$$

$$= (9 - 4x^2)^2 + 4x^4 = 81 - 72x^2 + 20x^4$$

$$y' = 144x + 80x^3$$

$$d)\quad y = (1 - \sqrt{x})^2(1 + \sqrt{x})^2 + x^3 = ((1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}))^2 + x^3 =$$

$$= (1 - x)^2 + x^3 = 1 - 2x + x^2 + x^3$$

$$y' = -2 + 2x + 3x^2$$

Aufgabe 8:

Geben Sie zwei Funktionen mit mehreren Funktionstermen an, bei denen nach Vereinfachung der Terme die Anwendung der Summen- und Faktorregel der Produktregel vorzuziehen ist.

Aufgabe 9:

Geben Sie vier Funktionen an, bei denen die Anwendung der Produktregel zur Bestimmung der Ableitung notwendig ist.

1) $f(x) = 2x^2 \cdot \sqrt{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = 2x^{5/2} + x^{2/3}$

Ableitung mithilfe der Summen- und Faktorregel:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{2}\, x^{\frac{5}{2}-1} + \frac{2}{3}\, x^{\frac{2}{3}-1} = 5x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} = 5x\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Ableitung mithilfe der Produktregel:

$$f'(x) = 2\left(x^2\right)' \cdot \sqrt{x} + 2x^2\left(\sqrt{x}\right)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' \cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= 4x\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= 5x\sqrt{x} + \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} = 5x\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

2) $f(x) = \left(3x^4 - x^2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6x}\right) \cdot \dfrac{1}{x^3} = 3x - x^{-1} + \dfrac{x^{-3}}{2} - \dfrac{x^{-4}}{6}$

$$f'(x) = 3 + x^{-2} - \frac{3}{2}\, x^{-4} + \frac{2}{3}\, x^{-5} = 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^4} + \frac{2}{3x^5}$$

1) $f\,(x) = e^x \sin x$

$$f\,'(x) = (e^x)'\,\sin x + e^x\,(\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

2) $f\,(x) = x^3 \tan x$

$$f\,'(x) = (x^3)'\,\tan x + x^3\,(\tan x)' = 3\,x^2 \tan x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$$

3) $f\,(x) = \sqrt{x}\,\cos x$

$$f\,'(x) = (\sqrt{x}\,)'\,\cos x + \sqrt{x}\,(\cos x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\cdot\sin x$$

4) $f\,(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}, \quad f\,'(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}}\cdot\ln x\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'\cdot\ln x + x^{-\frac{1}{3}}\cdot(\ln x)' =$

$$= -\frac{1}{3}\,x^{-\frac{1}{3}-1}\cdot\ln x + x^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{3 - \ln x}{3\,x\,\sqrt[3]{x}}$$

Quotientenregel: $y = \dfrac{u}{v} \qquad y' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$$u = u(x), \qquad v = v(x)$$

Aufgabe 10: Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen mit Hilfe der Quotientenregel

$a)\quad y = \dfrac{x}{1 - x^2}, \qquad b)\quad y = \dfrac{x}{1 - x^n}$

$c)\quad y = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}, \qquad d)\quad y = \dfrac{\sqrt{x}}{a - \sqrt{x}}$

$e)\quad y = \dfrac{1}{\ln x}, \qquad f)\quad y = \dfrac{\sin x}{\ln x}$

$g)\quad y = \tan x, \qquad h)\quad y = \dfrac{\sin x}{x}, \qquad i)\quad y = \dfrac{x}{\cos x}$

Quotientenregel: Lösung 10

$$a)\quad y' = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}, \qquad b)\quad y' = \frac{1 + (n-1)\, x^n}{(1 - x^n)^2}$$

$$c)\quad y' = -\,\frac{4\, a^2\, x}{(a^2 + x^2)^2}, \qquad d)\quad y' = \frac{a}{2\sqrt{x}\,(a - \sqrt{x})^2}$$

$$e)\quad y' = -\,\frac{1}{x\,(\ln x)^2}, \qquad f)\quad y' = \frac{x \ln x \cdot \cos x - \sin x}{x\, \ln^2 x}$$

$$g)\quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad h)\quad y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$i)\quad y' = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 + x \tan x}{\cos x}$$

Ist die Ableitung *f'(x)* einer Funktion als Funktion betrachtet differenzierbar, So ist (*f'(x)*)' die zweite Ableitung. Man schreibt auch

$$f''(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Ableitungsfunktionen kann man auch weitere Ableitungen definieren. Die n-te Ableitung ist, zum Beispiel, als $(n-1)$-te Ableitung definiert. Man schreibt für eine Funktion $y = f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{d x^n} \quad \text{oder} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{d x^n}$$

Aufgabe 11: Bestimmen Sie die gegebenen Ableitungen der Funktion

$$y = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 1, \qquad y', \; y'', \; y''', \; y^{(4)}, \; y^{(5)}, \; y^{(6)}, \; y^{(7)}$$

Lösung 11:

$$y = 3\,x^5 - 4\,x^3 + 2\,x^2 - 1\,, \qquad y\,' = 3 \cdot 5\,x^4 - 4 \cdot 3\,x^2 + 2 \cdot 2\,x$$

$$y\,'' = 3 \cdot 5{\cdot}4\,x^3 - 4 \cdot 3{\cdot}2\,x + 2 \cdot 2{\cdot}1\,, \qquad y\,''' = 3 \cdot 5{\cdot}4{\cdot}3\,x^2 - 4{\cdot}3\,!$$

$$y^{(4)} = 3 \cdot 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2\,x\,, \qquad y^{(5)} = 3 \cdot 5\,! = 360$$

$$y^{(6)} = y^{(7)} = 0$$

Beim Ableiten verringert sich der Grad einer ganzrationalen Funktion jeweils um 1.

Jede ganzrationale Funktion des Grades $n \geq 1$ ist differenzierbar. Ihre Ableitung f' ist eine ganzrationale Funktion vom Grad $n - 1$.