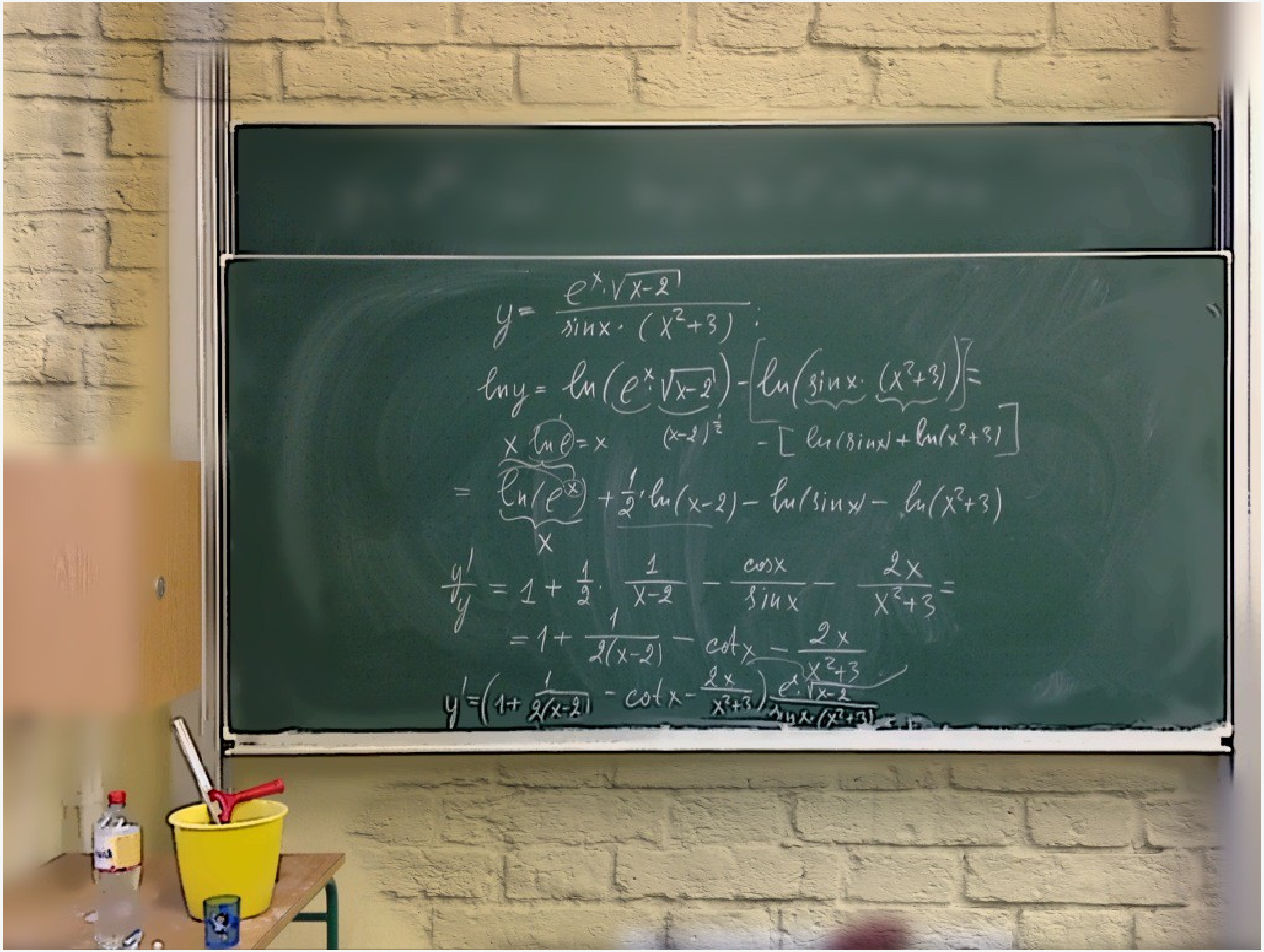

Logarithmische Differentiation

Bei der Bildung der Ableitung von solchen Funktionen wie

$$x^{x}, \qquad x^{\sin x}, \qquad \sqrt[x]{x}$$

können wir keine der bis jetzt bekannten Ableitungsregeln direkt anwenden, da die Variable x sowohl in der Basis als auch im Exponenten auftritt. Trotzdem gelingt die Differentiation dieser Funktionen, wenn man die Funktionsgleichung zunächst logarithmiert

$$f(x) = x^{x}, \qquad x > 0, \qquad \ln f(x) = \ln x^{x} = x \ln x$$

Die logarithmierte Funktionsgleichung differenziert man unter Verwendung von Ketten- und Produktregel

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1 \qquad \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x)\,(\ln x + 1) = x^{x}\,(\ln x + 1)$$

Diese Art des Differenzierens bezeichnet man als logarithmische Differentiation.

Logarithmische Differentiation:

In vielen Fällen, z.B. bei Funktionen vom Typ

$$f(x) = \left(u(x)\right)^{v(x)}, \qquad u(x) > 0$$

gelingt die Differentiation einer Funktion nach dem folgenden Schema:

- Logarithmieren der Funktionsgleichung
- Differenzieren der logarithmierten Gleichung unter Verwendung der Ableitungsregeln

Bestimmen Sie die 1. Ableitung der nachstehenden Funktionen durch logarithmische Differentiation

Aufgabe 1: $y = 3^{x}, \quad y = 3^{x+2}, \quad y = 3^{x^2}$

Aufgabe 2: $y = x^{3x}, \quad y = x^{2x-1}$

Aufgabe 3: $y = (\sin x)^{x}, \quad y = (\sin x)^{x-4}$

Aufgabe 4: $y = x^{\sin x}, \quad y = x^{\sin x + 3}$

Aufgabe 5: $y = \sqrt[x]{x}, \quad y = x^{\sqrt{x}}$

Aufgabe 6: $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$

Aufgabe 7: $y = \sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\,\sin^4 x\,\cos^2 x$

Lösung 1:

$$y = 3^{x}, \qquad \ln y = x \ln 3, \qquad \frac{y'}{y} = \ln 3, \qquad y' = 3^{x} \ln 3$$

$$y = 3^{x+2}, \qquad \ln y = (x+2) \ln 3, \qquad \frac{y'}{y} = \ln 3, \qquad y' = 3^{x+2} \ln 3$$

$$y = 3^{x^2}, \qquad \ln y = x^2 \ln 3, \qquad \frac{y'}{y} = 2x \ln 3, \qquad y' = 2x\, 3^{x^2} \ln 3$$

Lösung 2:

$$y = x^{3x}, \qquad \ln y = \ln \left(x^{3x} \right) = 3x \ln x$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (3x \ln x)' = 3 (\ln x + 1), \qquad y' = 3 x^{3x} (\ln x + 1)$$

$$y = x^{2x-1}, \qquad \ln y = (2x - 1) \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \ln x + (2x - 1) \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2 - \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{2x-1} \left(2 \ln x + (2x - 1) \frac{1}{x} \right)$$

$$y = (\sin x)^{x}, \qquad \ln y = \ln\left((\sin x)^{x}\right) = x \ln(\sin x)$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$y' = y\left(\ln(\sin x) + x \cdot \tan x\right) = (\sin x)^{x}\left(\ln(\sin x) + x \operatorname{ctg} x\right)$$

$$y = (\sin x)^{x-4}, \qquad \ln y = (x-4) \ln(\sin x)$$

$$y' = (\sin x)^{x-4}\left(\ln(\sin x) + (x-4)\frac{\cos x}{\sin x}\right) =$$

$$= (\sin x)^{x-4}\left(\ln(\sin x) + (x-4) \operatorname{ctg} x\right)$$

$$y = x^{\sin x}, \qquad \ln y = \ln\left(x^{\sin x}\right) = \sin x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)' =$$

$$= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$y = x^{\sin x + 3}, \qquad \ln y = (\sin x + 3) \cdot \ln x$$

$$y' = x^{\sin x + 3}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x}(\sin x + 3)\right)$$

$$y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}, \qquad \ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \qquad y' = y \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y = x^{\sqrt{x}}, \qquad \ln y = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}, \qquad y' = y \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} =$$

$$= x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \ln x \right)$$

$$y = \sqrt{\frac{x\,(x-1)}{x-2}}$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{x\,(x-1)}{x-2}\right) = \frac{1}{2}\,\big(\ln x + \ln(x-1) - \ln(x-2)\big)$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x\,(x-1)}{x-2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x^2 - 4x + 2}{\sqrt{x\,(x-1)\,(x-2)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{x^2}\ \frac{1 - x}{1 + x^2}\ \sin^4 x\ \cos^2 x$$

$$\ln y = \frac{2}{3}\ \ln x + \ln\ (1 - x) - \ln\ (1 + x^2) + 4\ \ln(\sin x) + 2\ \ln(\cos x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3}\ \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} - \frac{2\,x}{1 + x^2} + 4\ \frac{\cos x}{\sin x} - 2\ \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = y\left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} - \frac{2\,x}{1 + x^2} + 4\ \frac{\cos x}{\sin x} - 2\ \frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$y' = \sqrt[3]{x^2}\ \frac{1 - x}{1 + x^2}\ \sin^4 x\ \cos^2 \times$$

$$\times\left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} - \frac{2\,x}{1 + x^2} + 4\ \frac{\cos x}{\sin x} - 2\ \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$