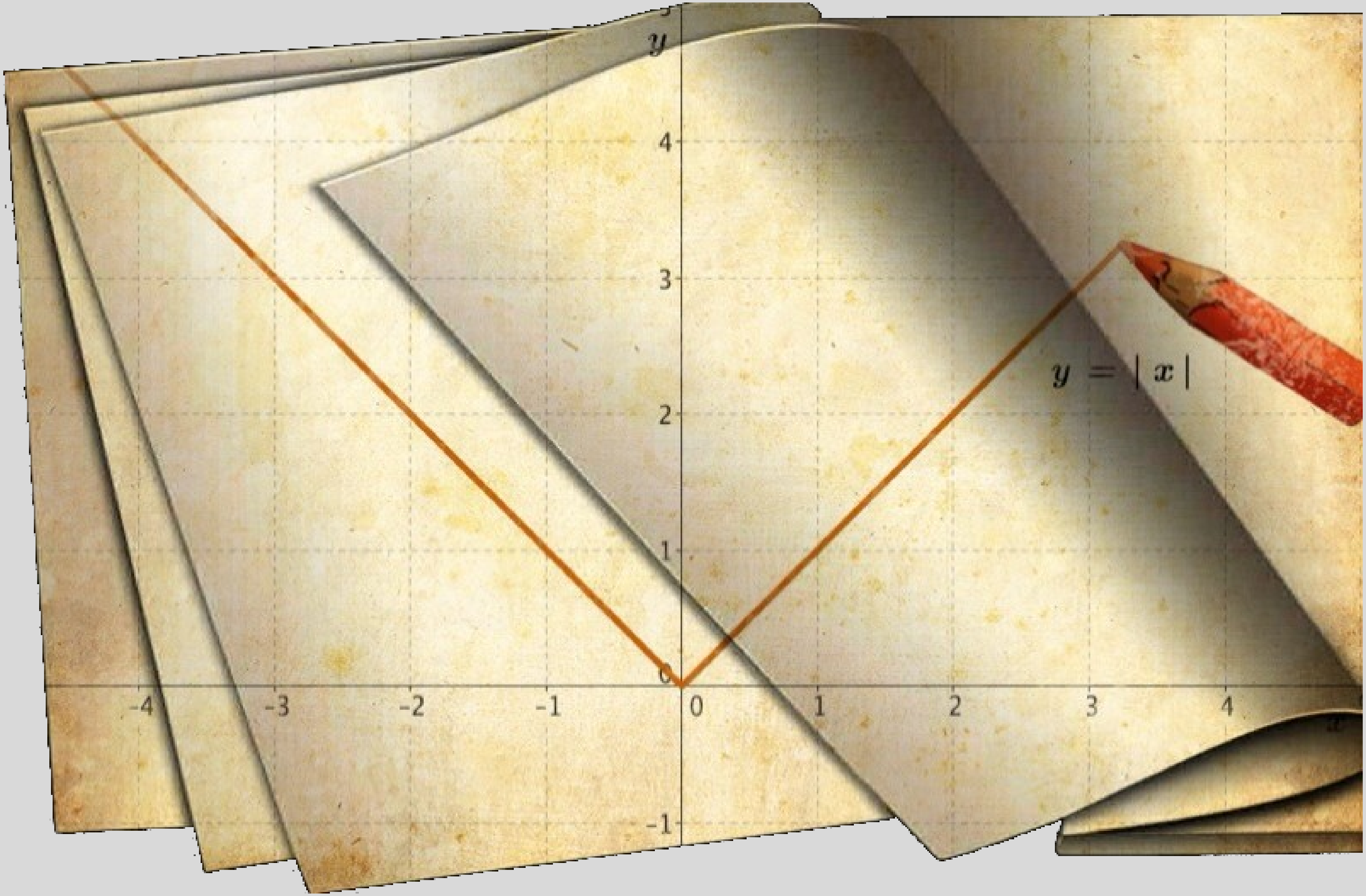


Ableitung einer Betragsfunktion

Differenzierbarkeit

Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

vorhanden ist. Diesen Grenzwert nennt man die erste Ableitung der Funktion $y = f(x)$.

Die Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle bedeutet, dass die Funktionskurve an dieser Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit endlicher Steigung besitzt.

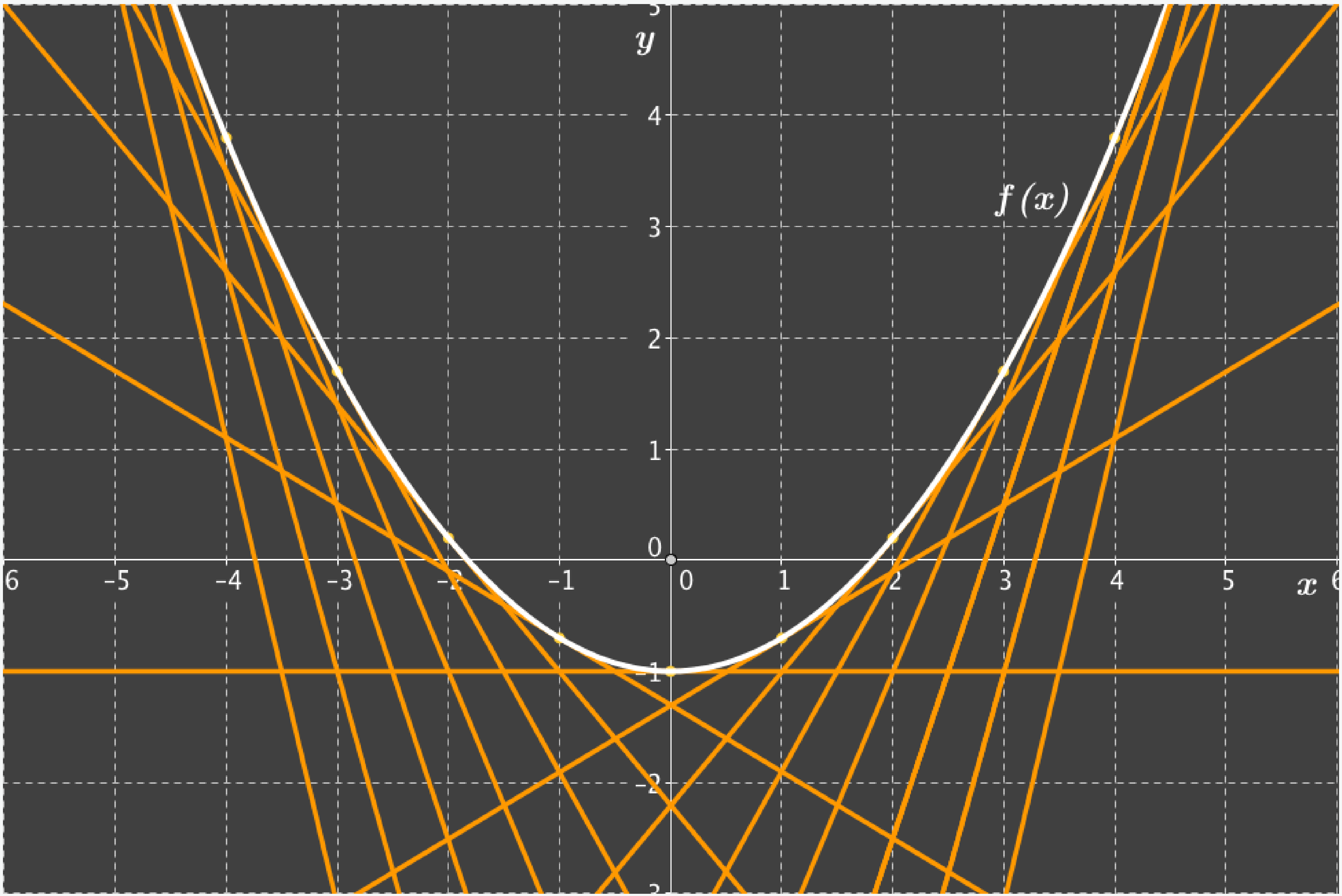


Abb. 1-1: Die quadratische Funktion y = f (x) und ihre Tangenten in den Punkten x = -7, -6, -5, . . . , 5, 6, 7

$$f(x) = 0.3\, x^2 - 1$$

Die Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle $x = a$ ist eine "anspruchsvollere" Eigenschaft als Stetigkeit an dieser Stelle.

Satz:

Ist eine Funktion f an einer Stelle $x = a$ des Definitionsbereiches differenzierbar, so ist f an dieser Stelle $x = a$ auch stetig.

Aber nicht jede an einer Stelle $x = a$ stetige Funktion ist an dieser Stelle auch differenzierbar.

Die bisherigen Beispiele von Funktionen könnten den Eindruck vermitteln, dass stetige Funktionen auch differenzierbar sind. Am Beispiel der Funktion $f(x) = | x |$ werden wir zeigen, dass dies nicht immer der Fall ist.

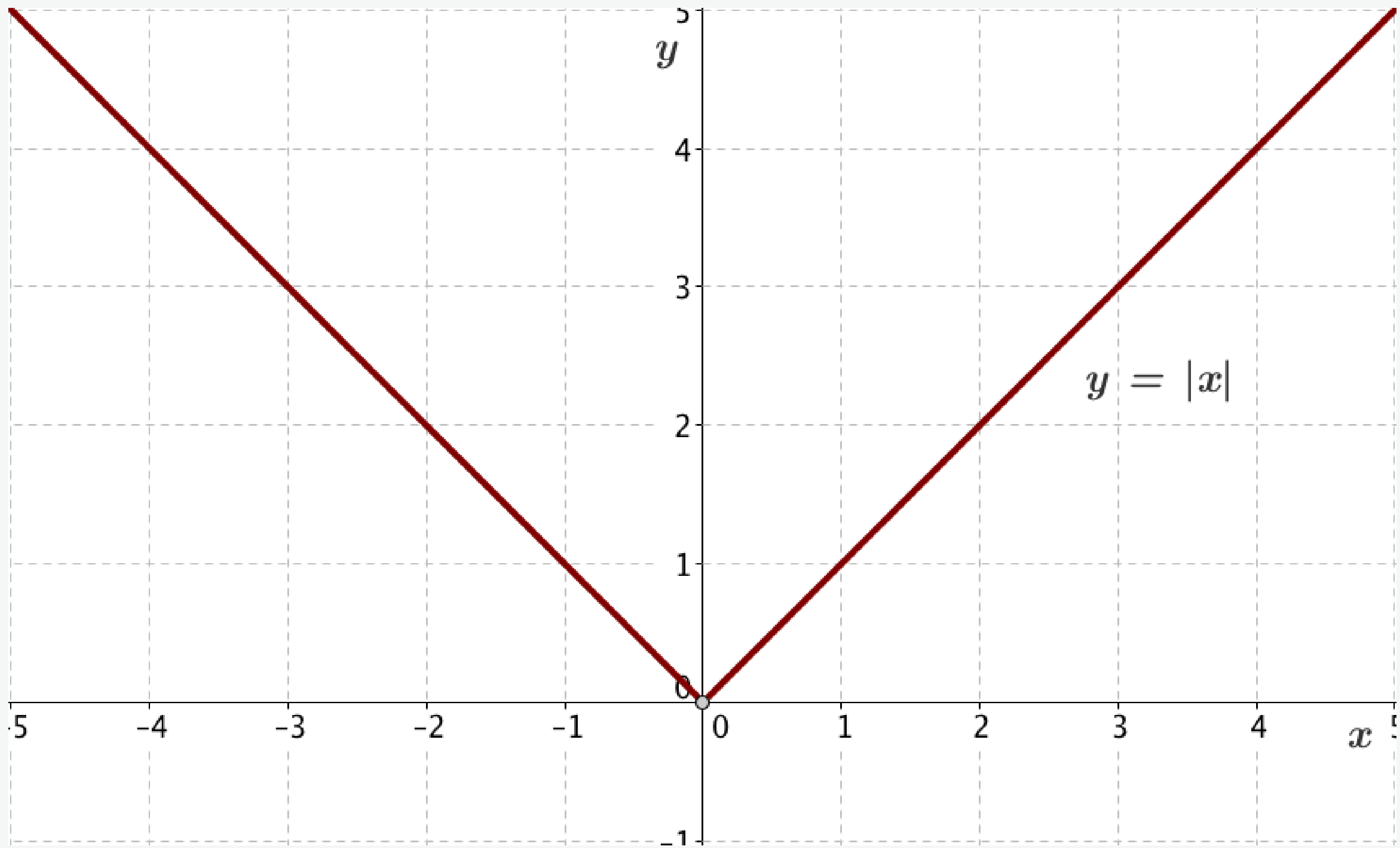


Abb. 1-2a: Die Betragsfunktion $y = |\,x\,|$

Die Zerlegung von $f(x) = |\,x\,|$ in abschnittweise definierte Teilfunktionen führt zu:

$$f(x) = \begin{cases} -x\,, & x < 0 \\ x\,, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Für alle $x < 0$ ist die Steigung offensichtlich gleich -1, für alle $x > 0$ ist die Steigung gleich 1. Es stellt sich die Frage, wie groß ist die Steigung des Funktionsgraphen an der sog. "Knickstelle" $x = 0$?

Je nachdem von welcher Seite man kommt, d.h. von welcher Seite aus man die Ableitung zu bilden versucht, erhält man verschiedene Steigungen: linksseitig $f\,'(0) = -1$, rechtsseitig $f\,'(0) = 1$. Man sagt, die linksseitige Ableitung stimmt mit der rechtsseitigen Ableitung nicht überein.

Definition:

Eine Funktion f ist an der Stelle nicht differenzierbar, wenn die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung verschieden sind.

Bei einer "Knickstelle" ist das immer der Fall.

Liegt eine solche Knickstelle in einem Intervall I, so wird die Funktion als nicht differenzierbar im Intervall I bezeichnet.

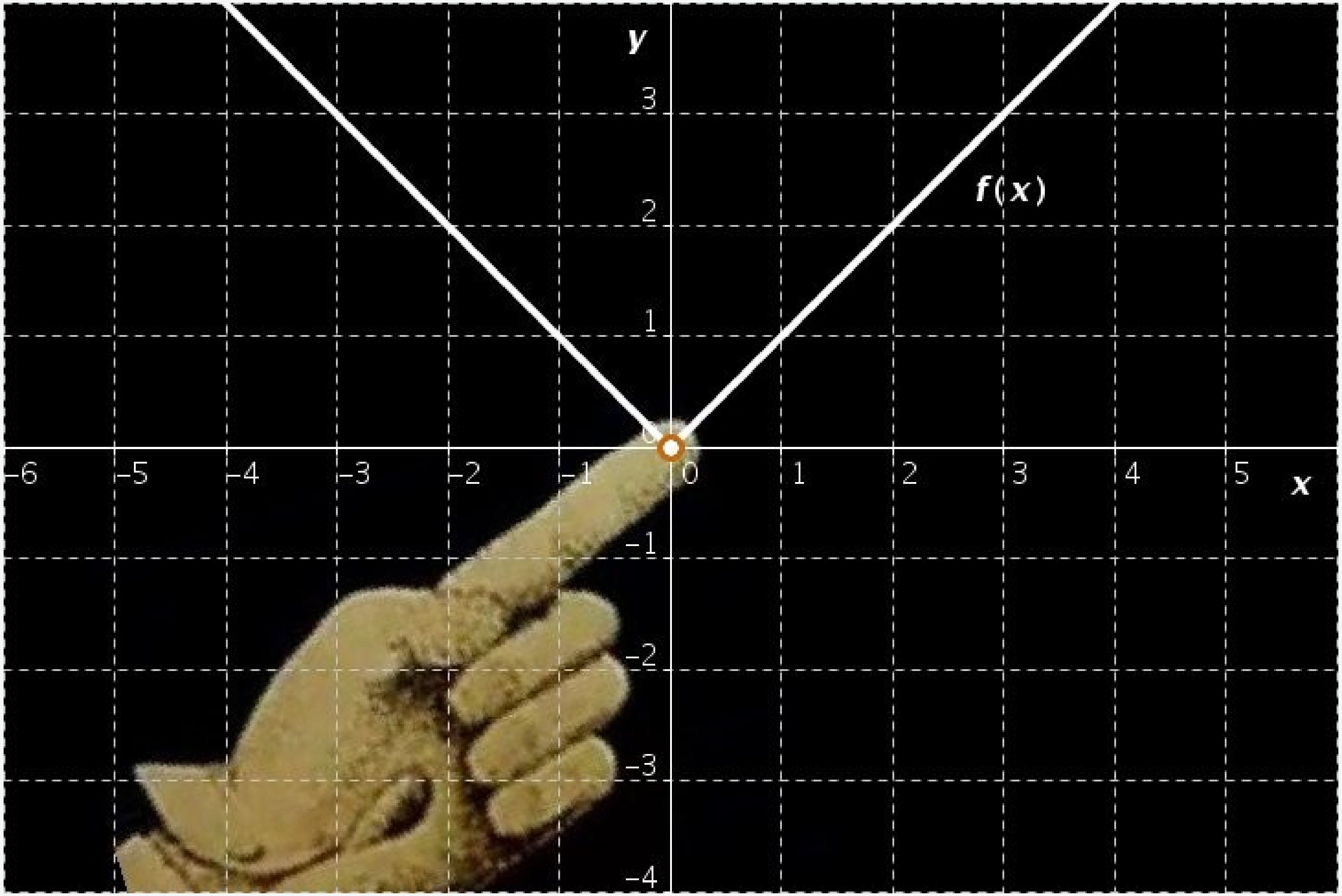


Abb. 1-2b: Die Betragsfunktion $y = | x |$, der Koordinatenursprung ist die Knickstelle

Definition:

Eine Funktion f ist genau dann in einem Intervall I differenzierbar, wenn sie für jedes x in I differenzierbar ist.

Bei der Ableitung von Betragsfunktionen ist also darauf zu achten, dass sie an bestimmten Stellen nicht differenzierbar sind. Für die Ableitungsfunktion sind also Intervalle zu bilden, die nicht differenzierbare Stellen ausschließen.

Ansonsten erfolgt das Differenzieren nach den bisher bekannten Ableitungsregeln. Die Funktionsgleichung der Betragsfunktion muss zuerst durch abschnittweise definierte Teilfunktionen ohne Betragszeichen dargestellt werden.

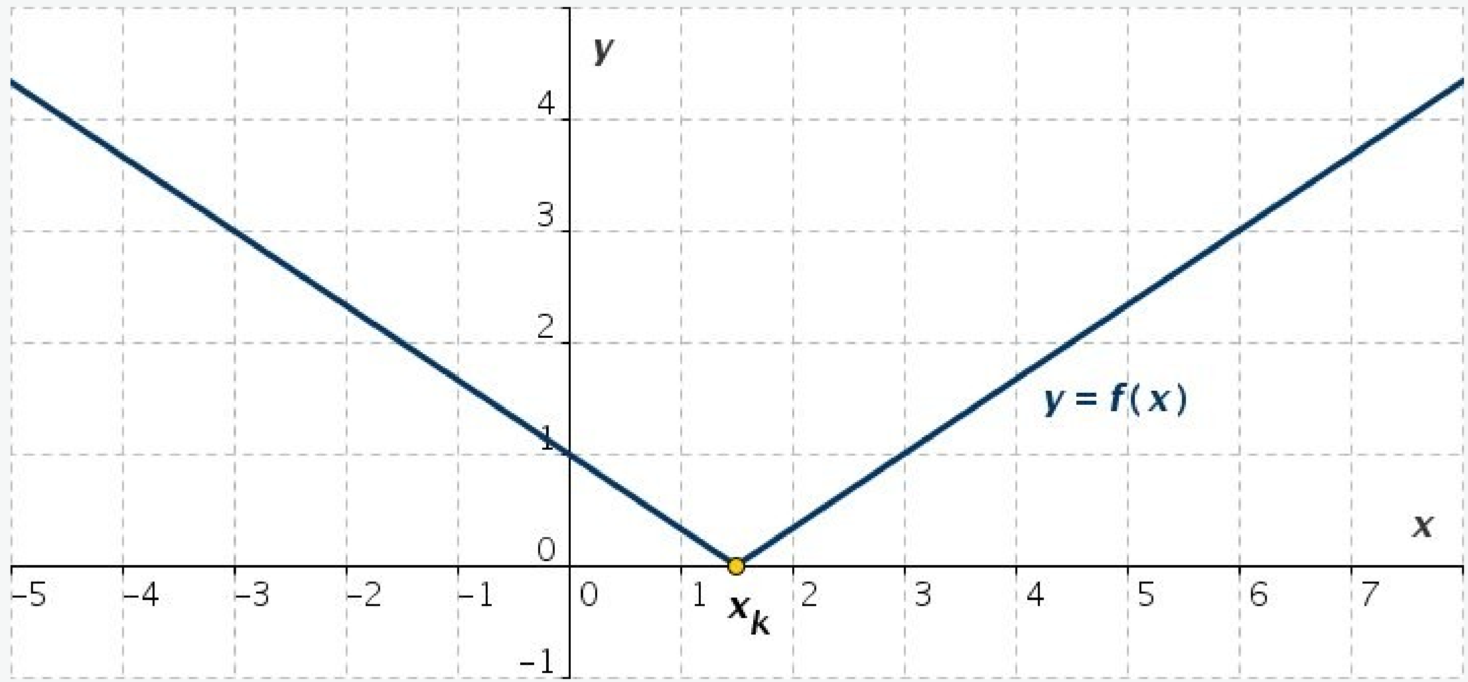


Abb. B-1a: Die Betragsfunktion y = | 2 x/3 - 1 |

Wir bestimmen die Ableitung von $y = \left| \frac{2}{3} x - 1 \right|$

1. Knickstelle $\frac{2}{3} x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{3}{2}$

2. Abschnittweise definierte Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{3} x, & x < \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} x - 1, & x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

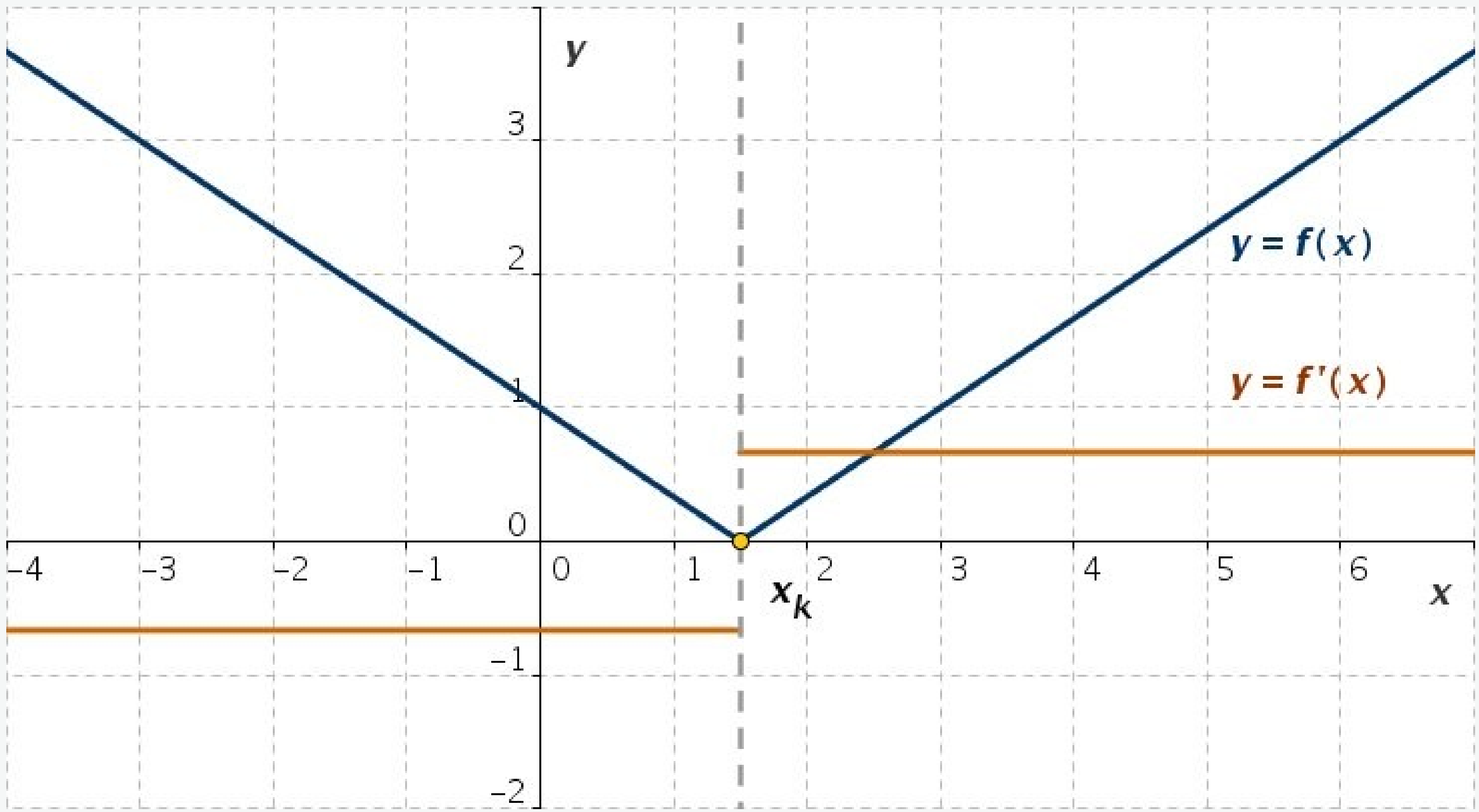
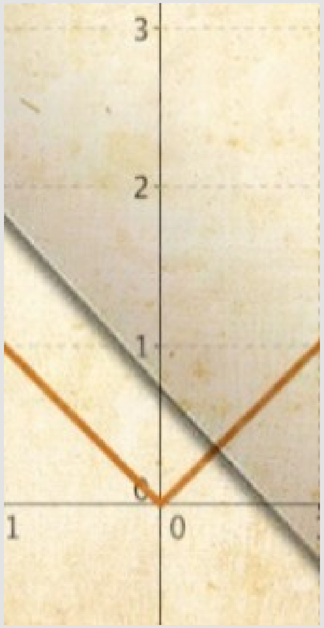


Abb. B-1b: Die Betragsfunktion y = | 2 x/3 - 1 | (blau) und ihre Ableitung (rot)

$$x < \frac{3}{2}: \quad f(x) = 1 - \frac{2}{3}\,x, \qquad f'(x) = -\frac{2}{3}$$

$$x > \frac{3}{2}: \quad f(x) = \frac{2}{3}\,x - 1, \qquad f'(x) = \frac{2}{3}$$



Gegeben ist die Funktion $f\,(x) = \left| \dfrac{x^2}{2} - 2 \right|$

a) Berechnen Sie die Stellen, an denen sie nicht differenzierbar ist

b) Geben Sie die Funktionsgleichung von f durch abschnittweise definierte Teilfunktionen ohne Betragszeichen an

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $y = f\,(x)$

d) Bestimmen Sie die Ableitung $y = f\,'(x)$

e) Welche Steigung hat der Funktionsgraph bei

$x = -3, \qquad x = -1, \qquad x = 2.5$

1. Knickstellen $\frac{x^2}{2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k1} = -2, \quad x_{k2} = 2$

2. Abschnittweise definierte Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 2, & x < -2 \\ 2 - \frac{x^2}{2}, & -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2, & x > 2 \end{cases}$$

3. Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ -x, & -2 < x < 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

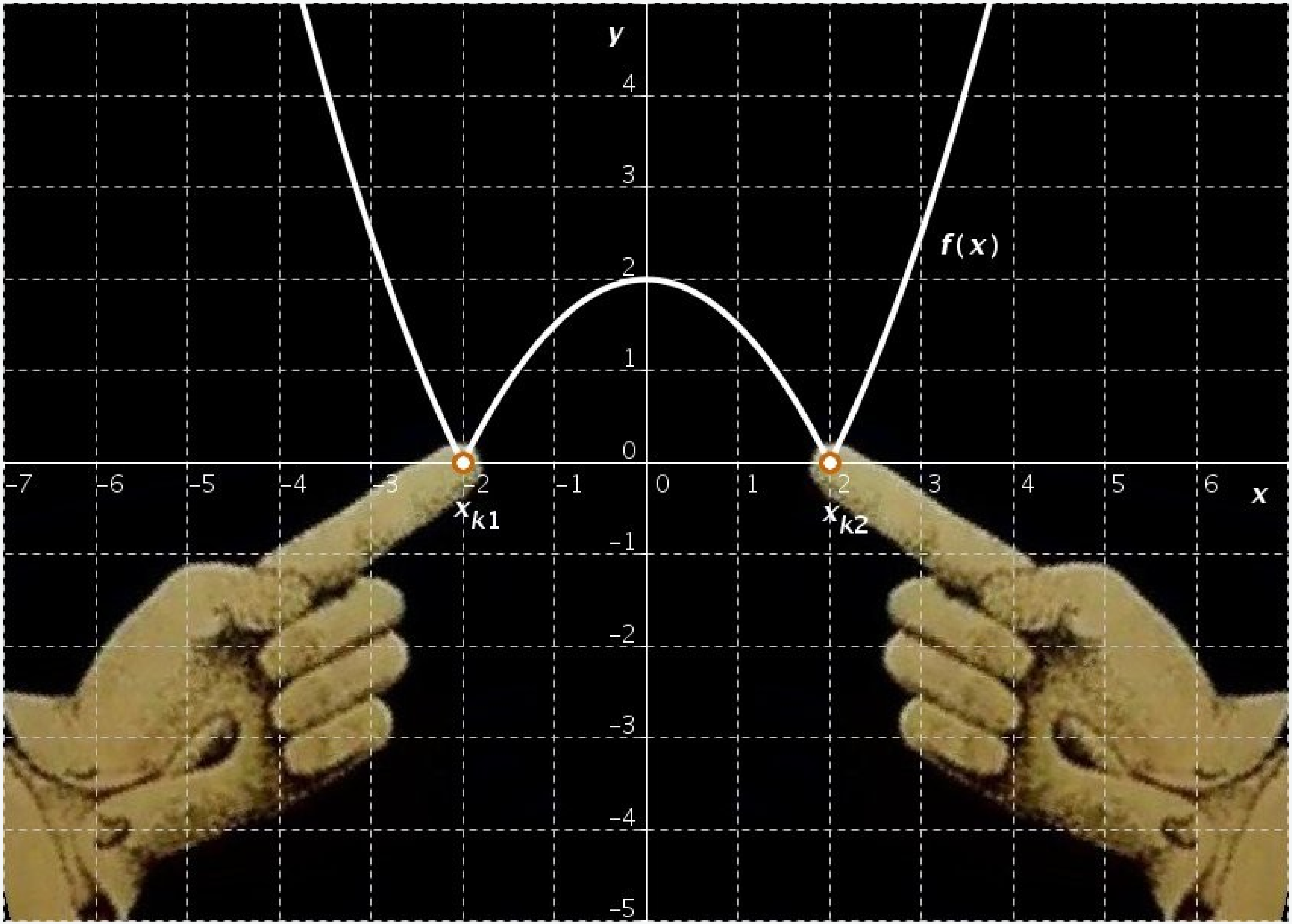


Abb. L-1a: Die Betragsfunktion $y = f(x)$, Punkte (-2, 0) und (2, 0) sind die Knickstellen

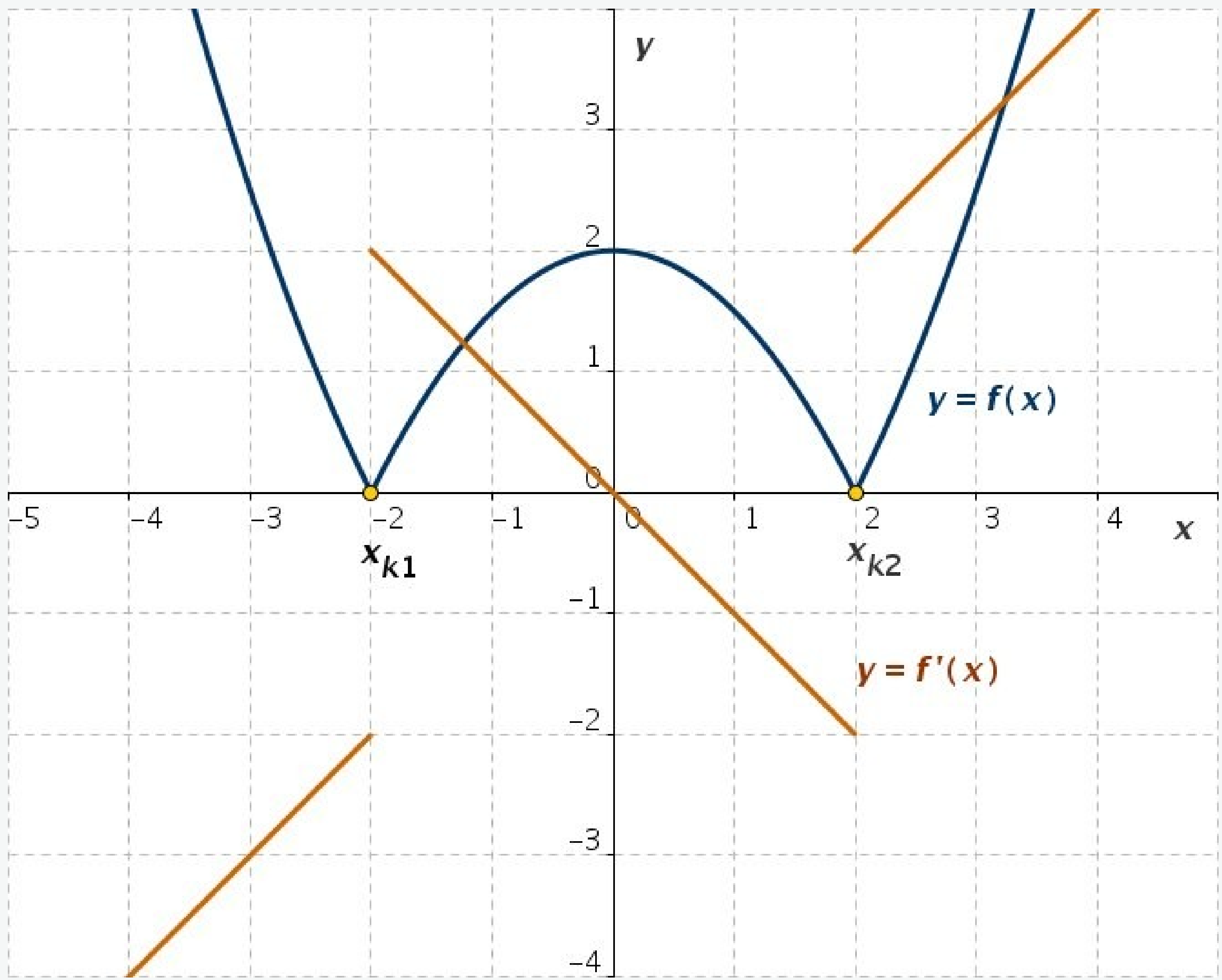


Abb. L-1b: Die Betragsfunktion $y = f(x)$ (blau) und ihre Ableitung (rot)

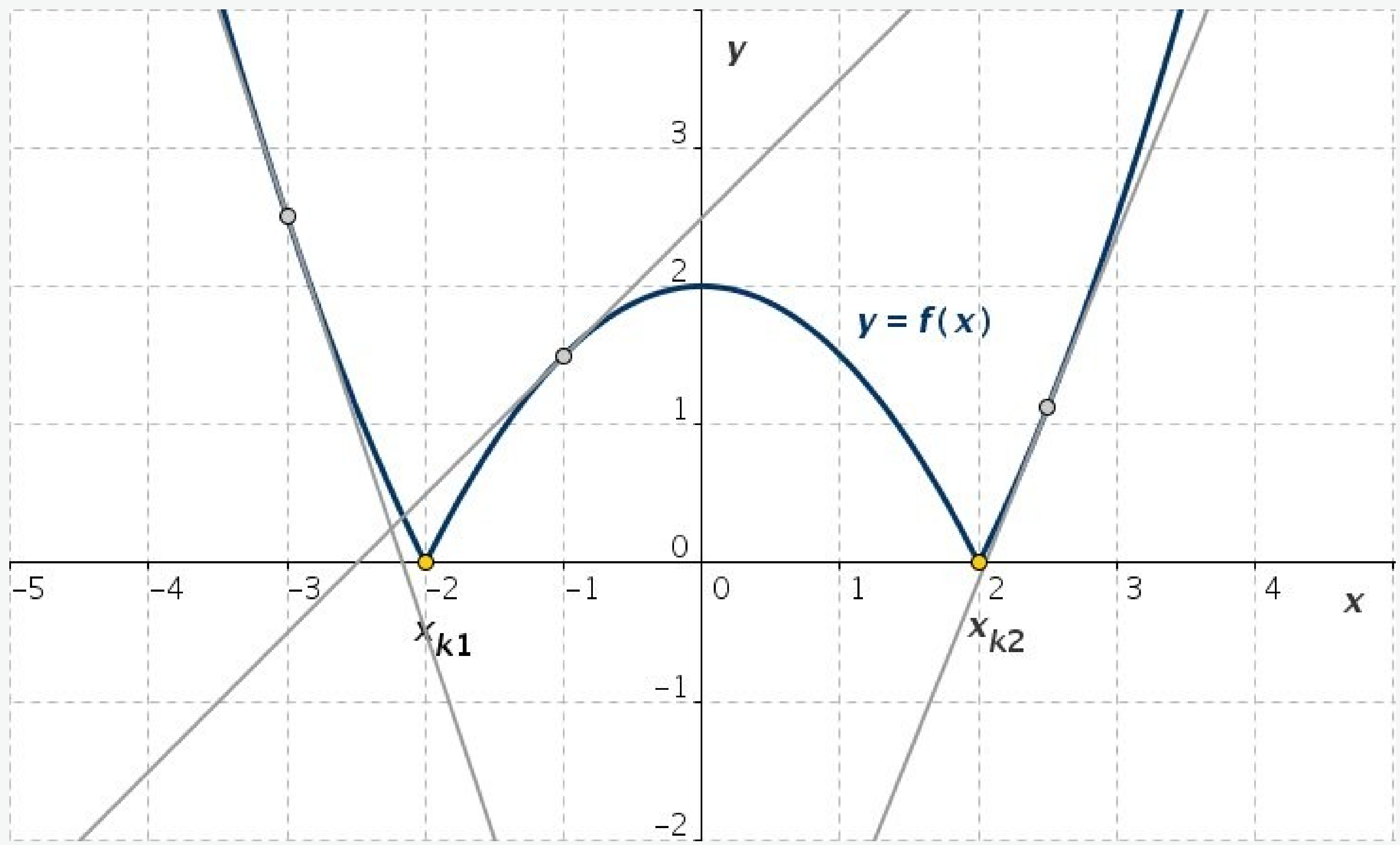


Abb. L-1c: Die Betragsfunktion $y = f(x)$ (blau) und ihre Tangenten in Punkten $x = -3$, $x = -1$ und $x = 2.5$

$$d)\quad f'(-3) = -3, \qquad f'(-1) = 1, \qquad f'(2.5) = 2.5$$