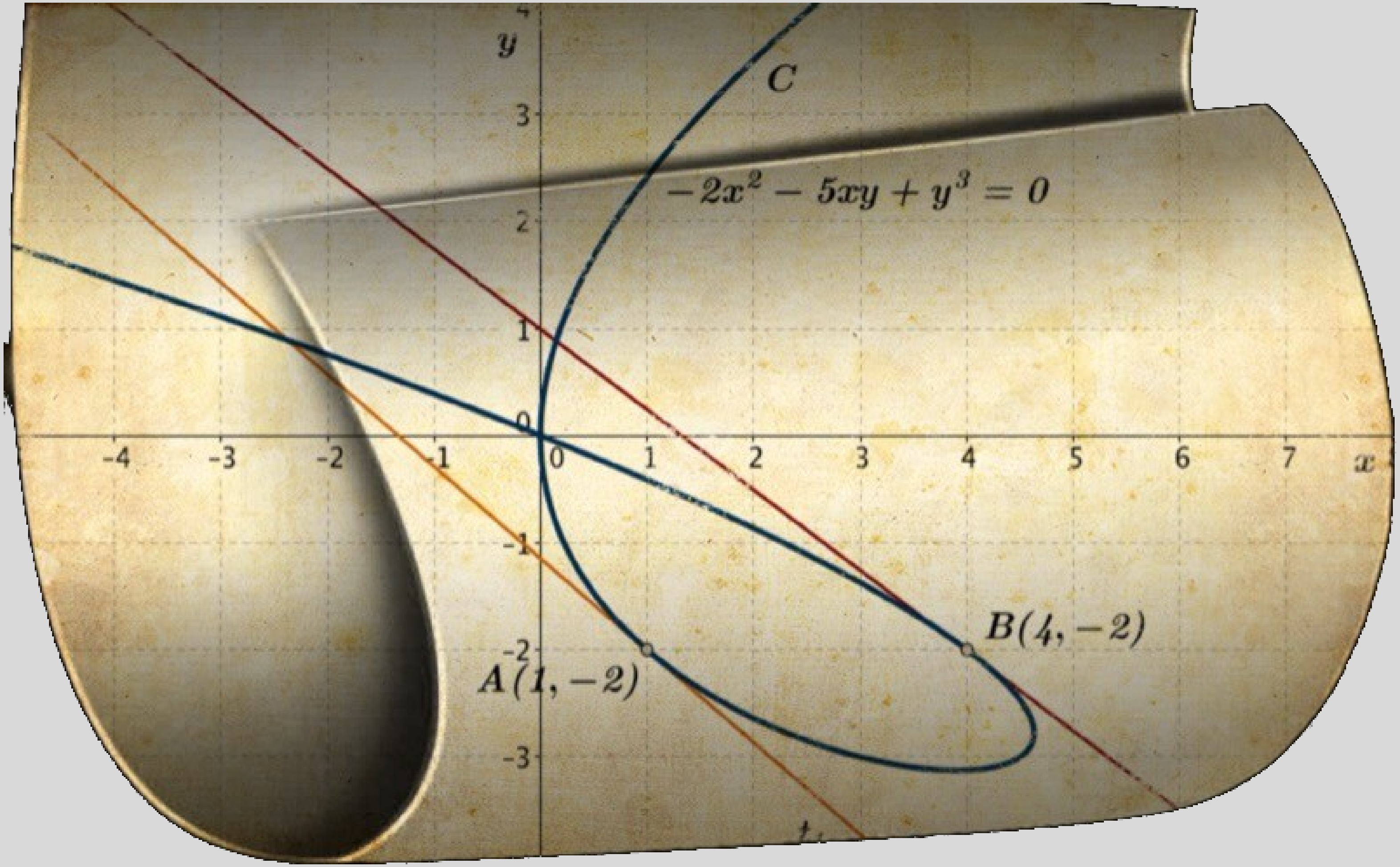
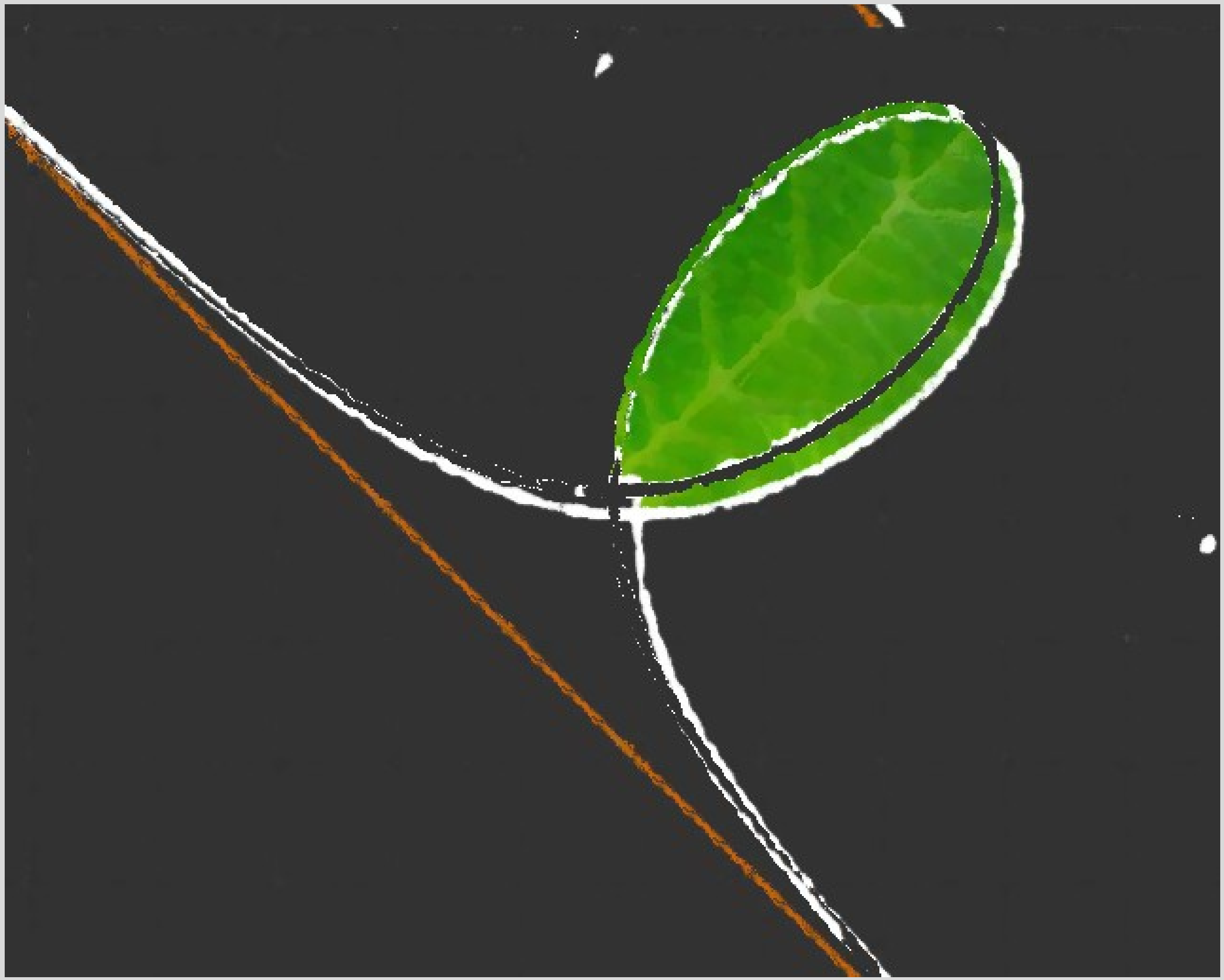


Implizite Differentiation



1-E2

Implizite Darstellung

Eine Funktion ist in impliziter Form gegeben, wenn die Funktionsgleichung nach keiner der beiden Variablen x und y aufgelöst ist. Beispielsweise

$$2x - y + 1 = 0$$

$$4xy - y + 3x^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^3 - y^3 = \frac{9}{2}xy$$

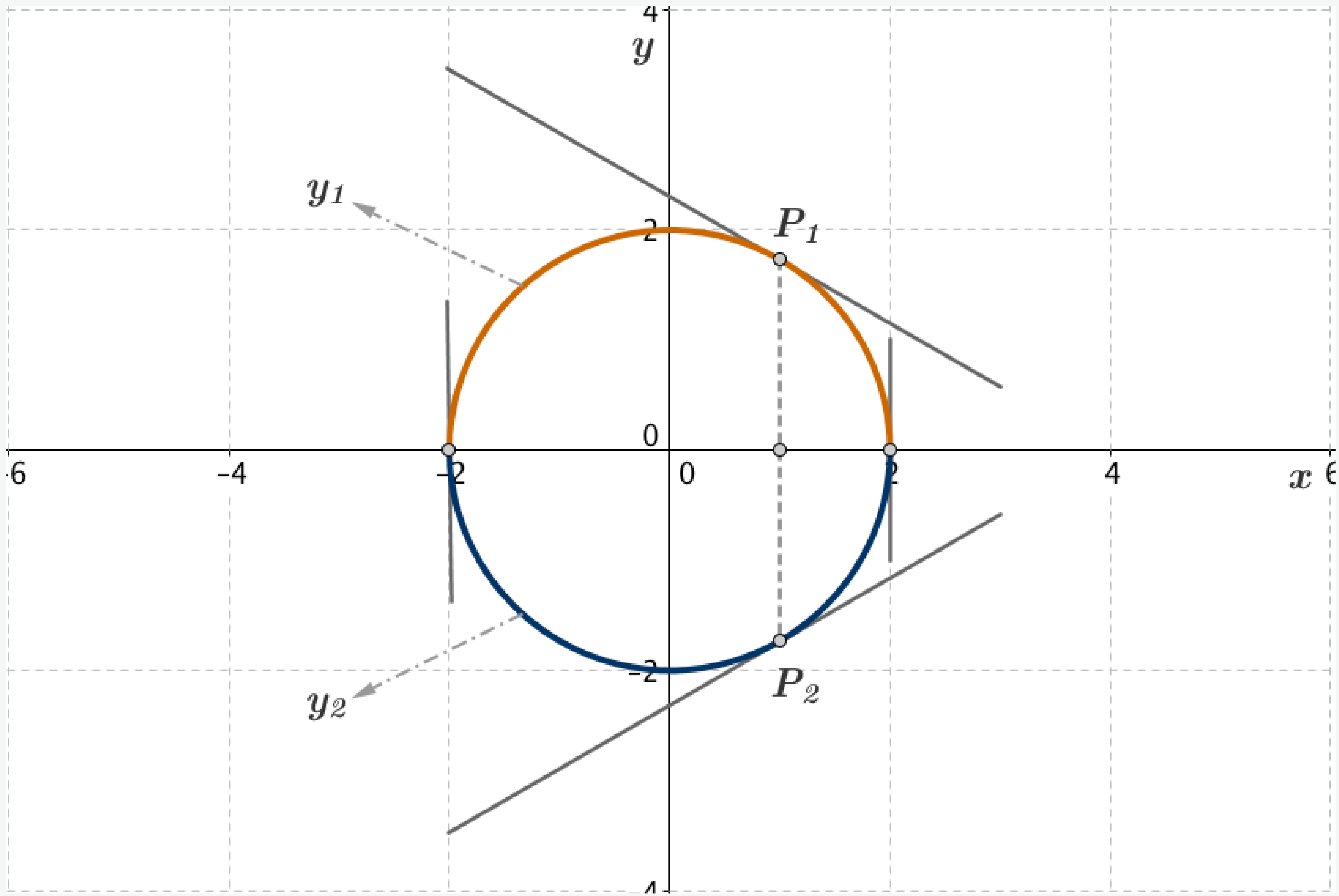


Abb. B1: Kreis mit Mittelpunkt O (0, 0) und Radius 2. Der Kreis wird durch eine implizite Funktionsgleichung dargestellt.

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad P_1 = (1, \sqrt{3}), \qquad P_2 = (1, -\sqrt{3})$$

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad y_1 = \sqrt{4 - x^2}\,, \qquad y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$$

$$\frac{d\,y_1}{dx} = -\,\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,, \qquad \left(\frac{d\,y_1}{dx}\right)_{x=1} = -\,\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{d\,y_2}{dx} = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,, \qquad \left(\frac{d\,y_2}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Implizite Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}\,(4)\,, \qquad \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = 2\,y\,\frac{dy}{dx} = 2\,y\,y'$$

$$2\,x + 2\,y\,y' = 0$$

$$y' = -\,\frac{x}{y}\,, \qquad (y')_{P_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \qquad (y')_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

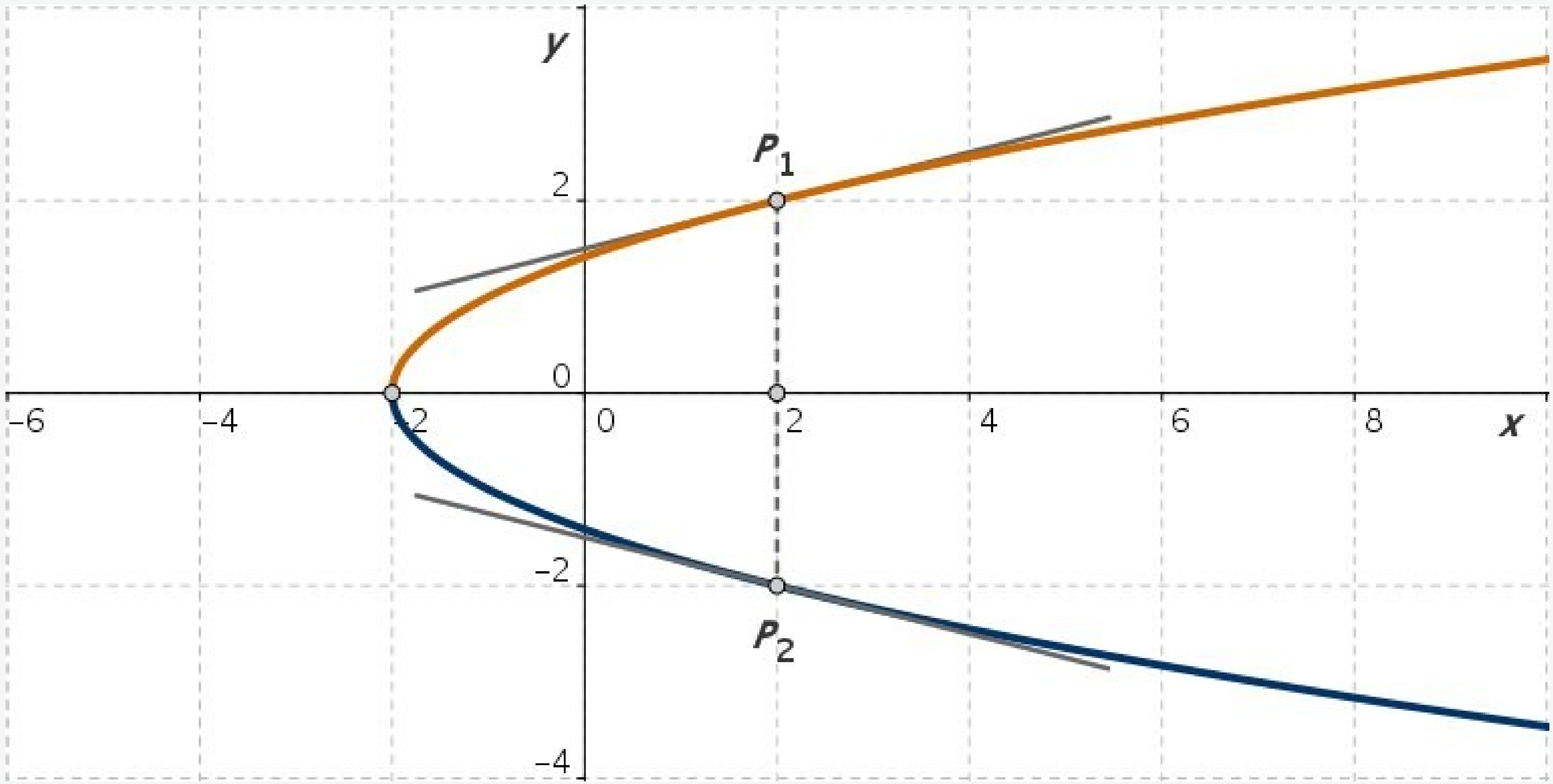


Abb. B2: Die Parabel $y^2 = x + 2$ ist durch eine in impliziter Form gegebene Funktion dargestellt

$$y^2 = x + 2, \qquad y_1 = \sqrt{x+2}\,, \qquad y_2 = -\sqrt{x+2}\,, \qquad P_1 = (2,\ 2)\,, \qquad P_2 = (2,\ -2)$$

$$y' = \frac{1}{2\,y}\,, \qquad (y')_{P_1} = \frac{1}{4}\,, \qquad (y')_{P_2} = -\,\frac{1}{4}$$

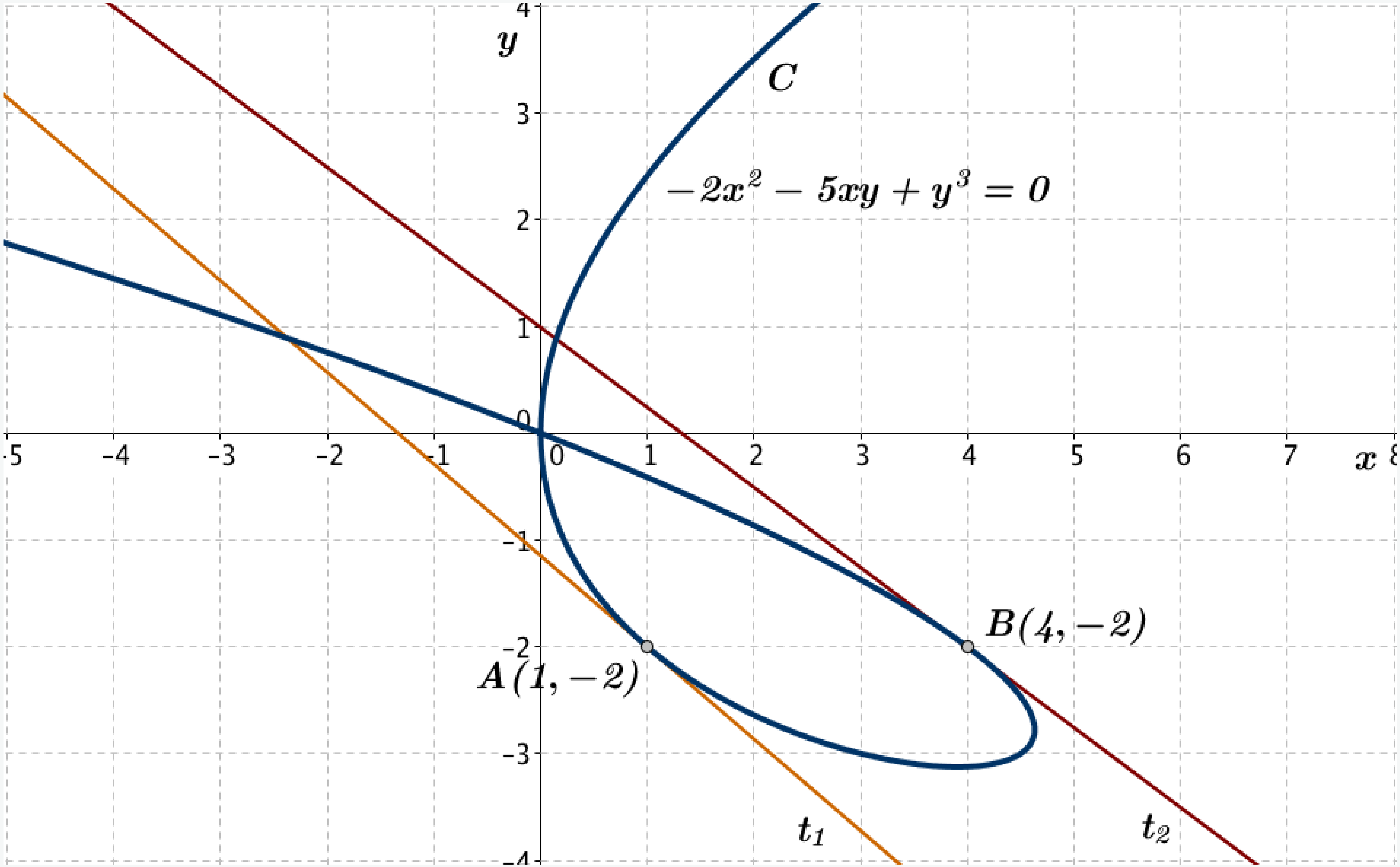


Abb. B3: Die Curve C mit den eingezeichneten Punkten A und B und den Tangenten in diesen Punkten

Bestimmen Sie die Steigung der Curve C in den Punkten A und B und die Gleichungen der Tangenten in diesen Punkten.

$$C: \quad y^3 = 2x^2 + 5xy, \qquad A = (1, -2), \qquad B = (4, -2)$$

$$C: \quad y^3 = 2x^2 + 5xy, \qquad A = (1, -2), \qquad B = (4, -2)$$

$$\frac{d}{dx}\, y^3 = \frac{d}{dx}\left(2x^2 + 5xy\right), \qquad 3y^2 y' = 4x + 5(y + xy')$$

$$y'(3y^2 - 5x) = 4x + 5y, \qquad y' = \frac{4x + 5y}{3y^2 - 5x}$$

$$y'|_{A(1,-2)} = \left(\frac{4x + 5y}{3y^2 - 5x}\right)_{A(1,-2)} = -\frac{6}{7}, \qquad y'|_{B(4,-2)} = \left(\frac{4x + 5y}{3y^2 - 5x}\right)_{B(4,-2)} = -\frac{3}{4}$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt P:

$$P = (x_0,\, y_0): \quad y = y_0 + m_t(x - x_0)$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt A:

$$A = (1, -2): \qquad y = -2 - \frac{6}{7}(x - 1), \qquad y = -\frac{8}{7} - \frac{6}{7}x$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt B:

$$B = (4, -2): \qquad y = -2 - \frac{3}{4}(x - 4), \qquad y = 1 - \frac{3}{4}x$$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie durch implizites und explizites Differenzieren die Ableitung folgender Funktionen

$a)\ x\,y - x + 2\,y = -3, \qquad b)\ e^{\,y - x^2} = \dfrac{1}{x}$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie durch implizites Differenzieren die Ableitung folgender Funktionen in den Punkten P

$a)\ x\,y = 4, \qquad P_1 = (4,\ 1), \qquad P_2 = (2,\ 2)$

$b)\ x^3 - y^2 = -1, \qquad P_1 = (2,\ 3), \qquad P_2 = (1,\ -\sqrt{2})$

$c)\ x \cos\left(\dfrac{y}{2}\right) = 2, \qquad P = \left(4,\ \dfrac{2\,\pi}{3}\right), \qquad d)\ y^2 = \ln(x^4), \qquad P = (e,\ 2)$

$$a)\ x\,y - x + 2\,y = -3, \qquad y\,(x + 2) = -3 + x\,,$$

$$y = \frac{x - 3}{x + 2}\,, \qquad y\,' = \frac{5}{(x + 2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\,(x\,y - x + 2\,y) = \frac{d}{dx}\,(-3)\,, \qquad y + x\,y\,' - 1 + 2\,y\,' = 0$$

$$y\,'(x + 2) = 1 - y\,, \qquad y\,' = \frac{1 - y}{x + 2} = \frac{1 - \dfrac{x - 3}{x + 2}}{x + 2} = \frac{5}{(x + 2)^2}$$

$$b)\ e^{\,y - x^2} = \frac{1}{x}\,, \qquad y\,' = 2\,x - \frac{1}{x}$$

Implizite Differentiation: Lösung 2a

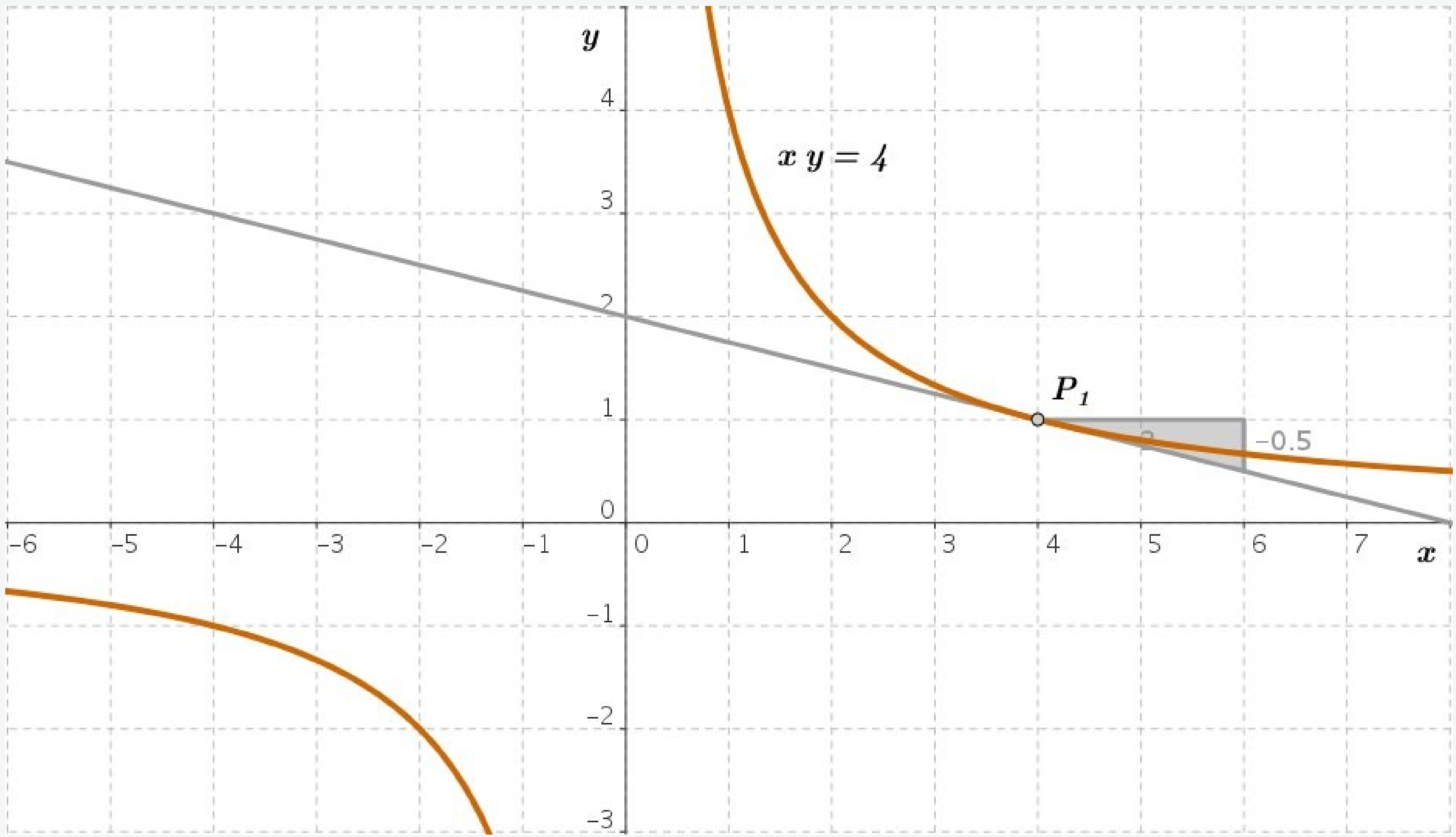


Abb. L2a-1: Graphische Darstellung der Gleichung x y = 4 mit Punkt (4, 1) und dortiger Tangente mit Steigung -1/4

$$\frac{d}{dx}\,(x\,y) = \frac{d}{dx}\,(4)\,, \qquad y + x\,y\,' = 0, \qquad y\,' = -\,\frac{y}{x}\,, \qquad y\,'\,\big|_{P_1} = -\left(\frac{y}{x}\right)_{x=4,\ y=1} = -\,\frac{1}{4}$$

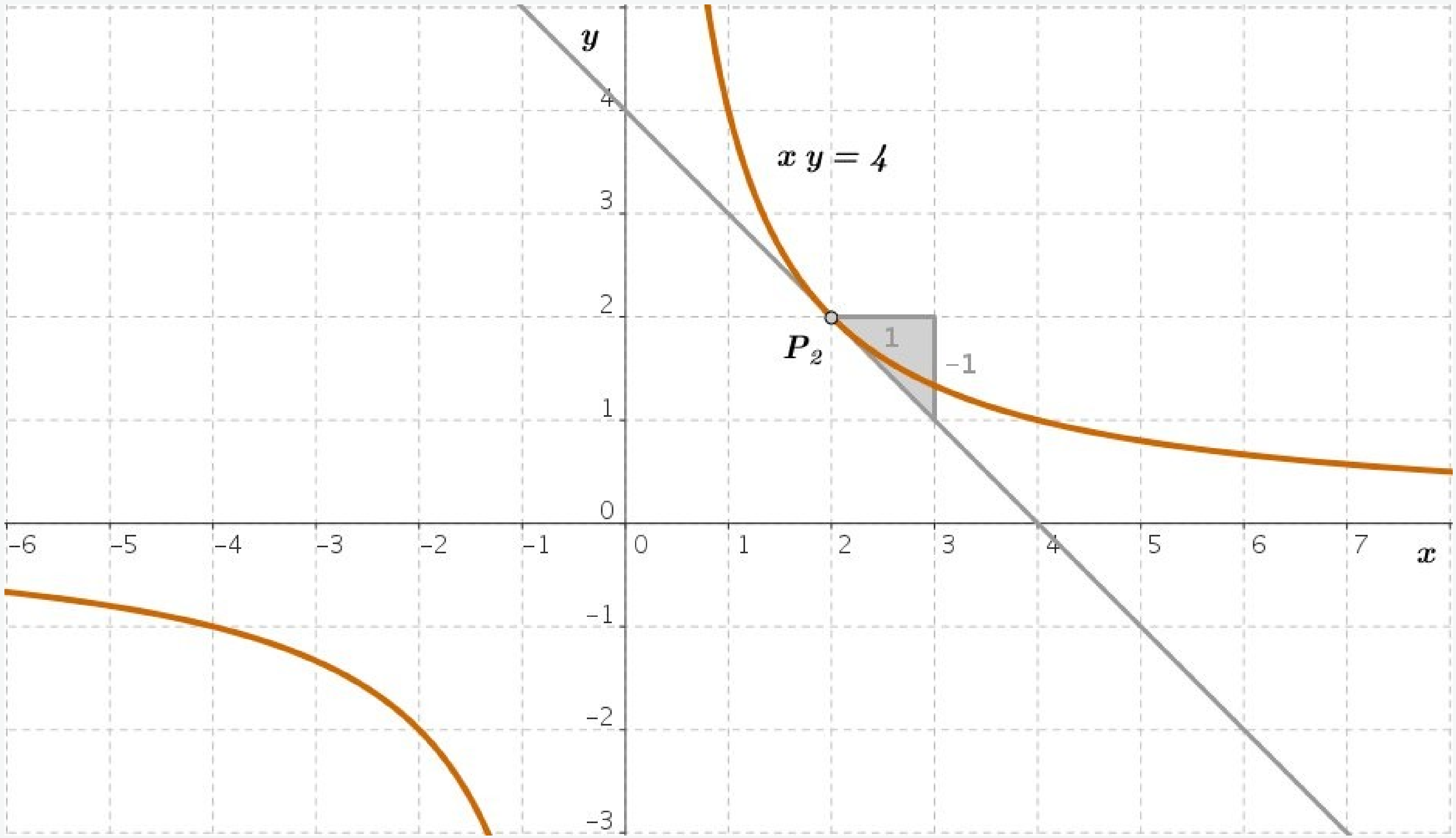


Abb. L2a-2: Graphische Darstellung der Gleichung $x\,y = 4$ mit Punkt (2, 2) und dortiger Tangente mit Steigung - 1

$$y\,' = -\,\frac{y}{x}\,, \qquad y\,'\,|_{P_2} = -\left(\frac{y}{x}\right)_{x=2,\ y=2} = -1$$

$$b)\ \frac{d}{dx}\left(x^3 - y^2\right) = \frac{d}{dx}(-1), \qquad 3x^2 - 2yy' = 0, \qquad y' = \frac{3x^2}{2y}$$

$$y'|_{P_1} = \left(\frac{3x^2}{2y}\right)_{x=2,\ y=3} = 2$$

$$y'|_{P_2} = \left(\frac{3x^2}{2y}\right)_{x=1,\ y=-\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \simeq -1.06$$

$$c)\ \frac{d}{dx}\left(x\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right) = \frac{d}{dx}2, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}\cot\left(\frac{y}{2}\right), \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P=(4,\ 2\mathrm{pi}/3)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$d)\ \frac{d}{dx}y^2 = 4\frac{d}{dx}\ln|x|, \qquad 2yy' = \frac{4}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{xy}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P=(e,\ 2)} = \frac{1}{e}$$

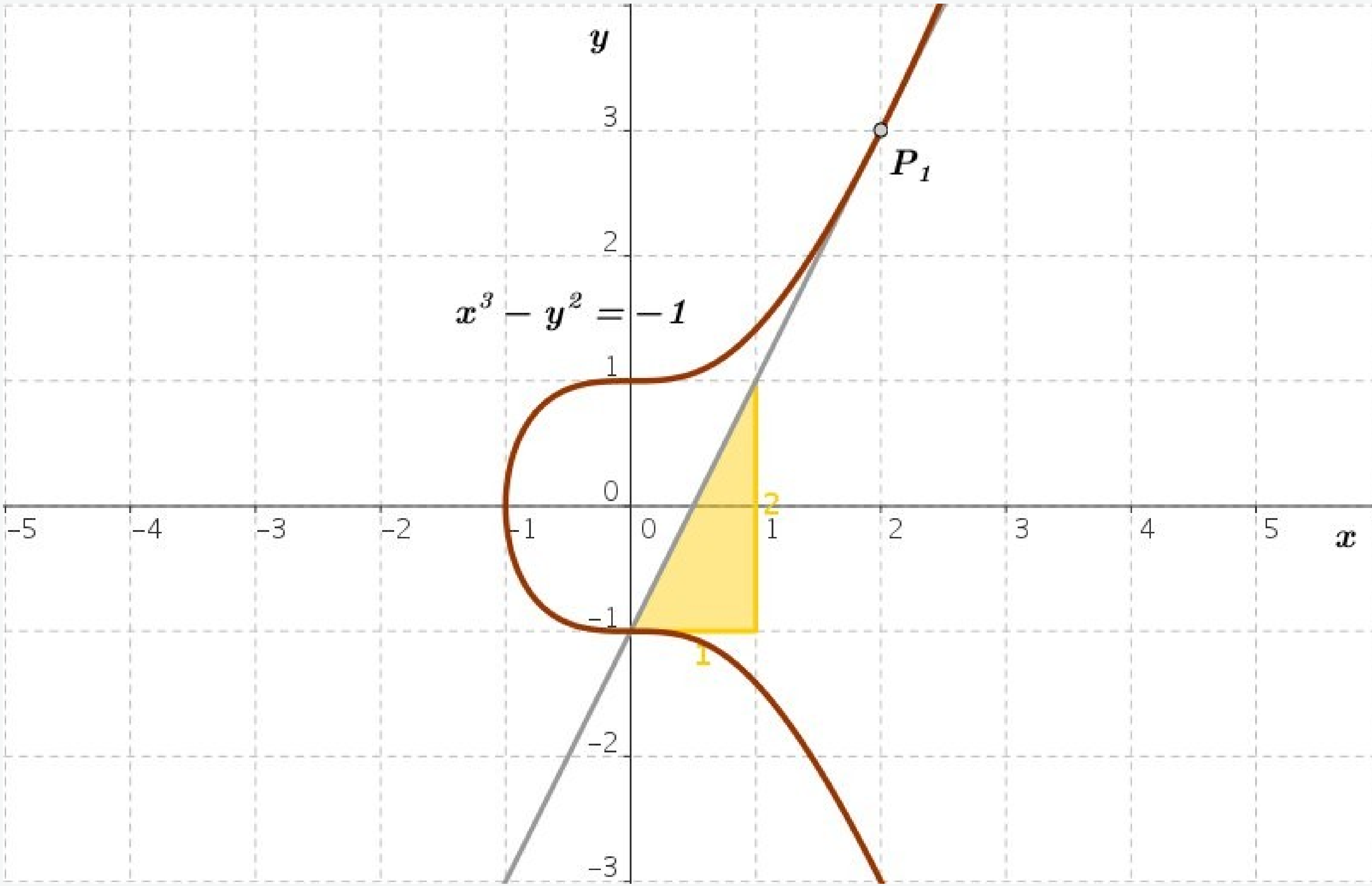


Abb. L2b-1: Graphische Darstellung der Gleichung $x^3 - y^2 = -1$ mit Punkt (2, 3) und dortiger Tangente mit Steigung 2

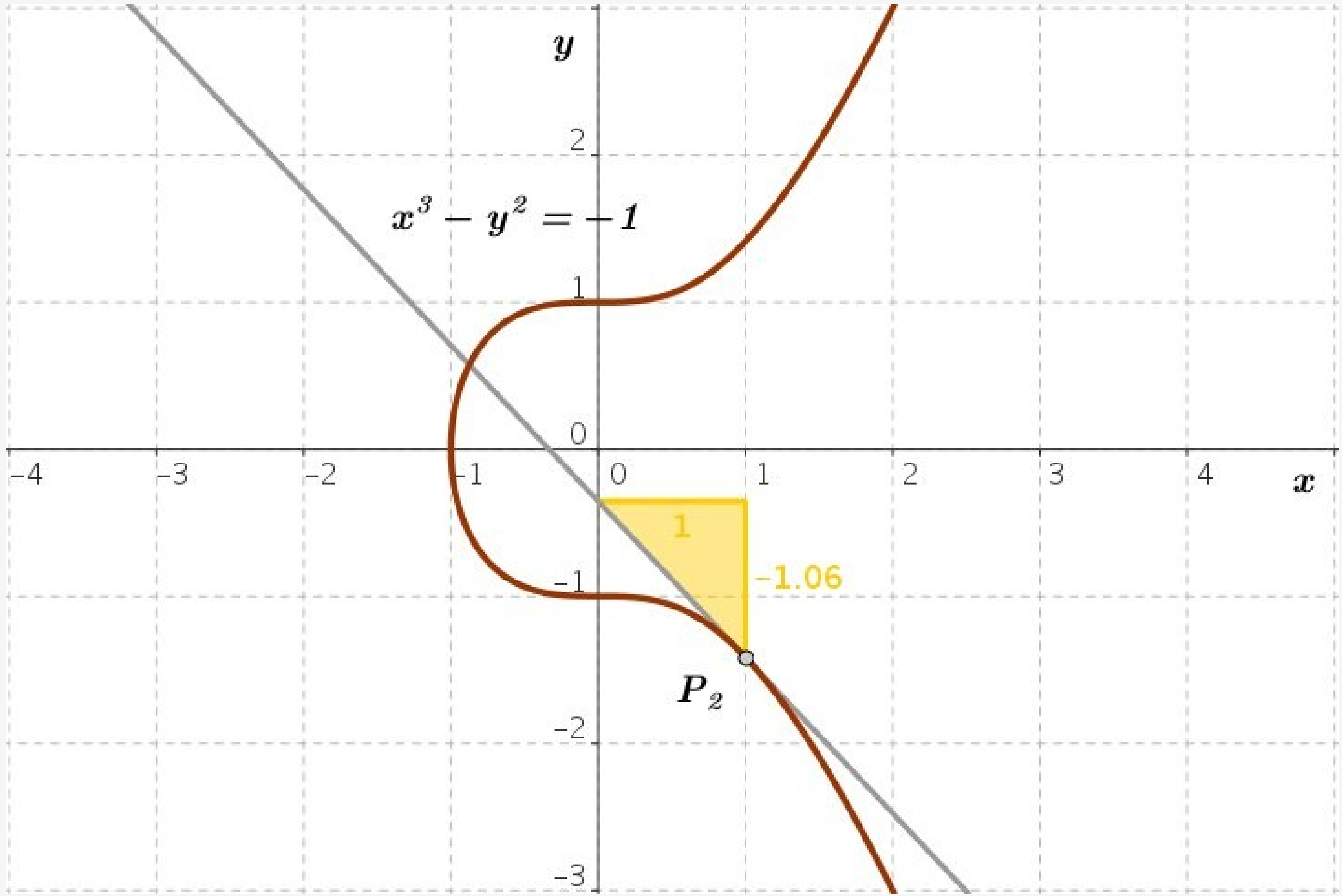


Abb. L2b-2: Graphische Darstellung der Gleichung $x^3 - y^2 = -1$ mit Punkt $(1, -\sqrt{2})$ und dortiger Tangente mit Steigung -1.06

Bestimmen Sie *dy/dx* durch implizites Differenzieren

$a)$ $x^2 y - 2x + y = 5, \qquad x^2 - y^2 = 16, \qquad 4x^2 + 9y^2 = 25$

$b)$ $x^2 - 2xy + 3y^2 = 6, \qquad y^4 + 4y - 2x^3 = 2x + 1,$

$c)$ $\dfrac{xy}{x - y} = x + y, \qquad \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 3, \qquad \dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2} = 4,$

$$a)\quad x^2 y - 2x + y = 5, \quad y' = \frac{2\,(1 - x\,y)}{1 + x^2}, \qquad x^2 - y^2 = 16, \quad y' = \frac{x}{y},$$

$$4x^2 + 9y^2 = 25, \quad y' = -\frac{4x}{9y},$$

$$b)\quad x^2 - 2xy + 3y^2 = 6, \qquad y' = \frac{x - y}{x - 3y},$$

$$y^4 + 4y - 2x^3 = 2x + 1, \qquad y' = \frac{3x^2 + 1}{2\,(y^3 + 1)},$$

$$c)\quad \frac{xy}{x - y} = x + y, \quad xy = x^2 - y^2, \qquad y' = \frac{2x - y}{x + 2y},$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 3, \quad x^2 + 2y^2 = 0, \qquad y' = -\frac{x}{2y},$$

$$\frac{x + 2y}{x^2 + y^2} = 4, \quad y' = \frac{8x - 1}{2\,(1 - 4y)}.$$

Bestimmen Sie *dy/dx* durch implizites Differenzieren

$a)\quad x - y = \sin y + xy, \qquad \sin x + \sin y = \frac{x}{2}, \qquad \sin x^2 + \cos y = x^2 - y^2,$

$b)\quad y = \cos(x + y), \qquad \sin(x + y) = y - x, \qquad \cos(2x + y) = y^2 + x,$

$c)\quad \sin y + x^2 y^2 = x - y, \qquad \sin(x^2 - y) = xy, \qquad \cos(y^2 - x) = 2x - y,$

$d)\quad \cos y - \sin y = x^3\, y, \qquad \cos^2 y = x^2 - y, \qquad \sin^2(2y) = 2x - y - 1.$

Implizite Differentiation: Lösung 4 a,b

$$a)\quad x - y = \sin y + xy, \qquad y' = \frac{1-y}{1+x+\cos y},$$

$$\sin x + \sin y = \frac{x}{2}, \qquad y' = \left(\frac{1}{2} - \cos x\right)\frac{1}{\cos y} = \left(\frac{1}{2} - \cos x\right)\sec y,$$

$$\sin(x^2) + \cos y = x^2 - y^2, \qquad y' = \frac{2x\,(1-\cos(x^2))}{2y - \sin y},$$

$$b)\quad y = \cos(x+y), \qquad y' = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)},$$

$$\sin(x+y) = y - x, \qquad y' = \frac{1+\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)},$$

$$\cos(2x+y) = y^2 + x, \qquad y' = -\frac{1+2\,\sin(2x+y)}{2y+\sin(2x+y)},$$

$$\sin y + x^2 y^2 = x - y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin y + x^2 y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x - y\right),$$

$$y' \cos y + 2\,x\,y^2 + 2\,x^2\,y\,y' = 1 - y'$$

$$y' \cos y + y' + 2\,x^2\,y\,y' = 1 - 2\,x\,y^2$$

$$\left(1 + \cos y + 2\,x^2\,y\right) y' = 1 - 2\,x\,y^2$$

$$y' = \frac{1 - 2\,x\,y^2}{1 + \cos y + 2\,x^2\,y}$$

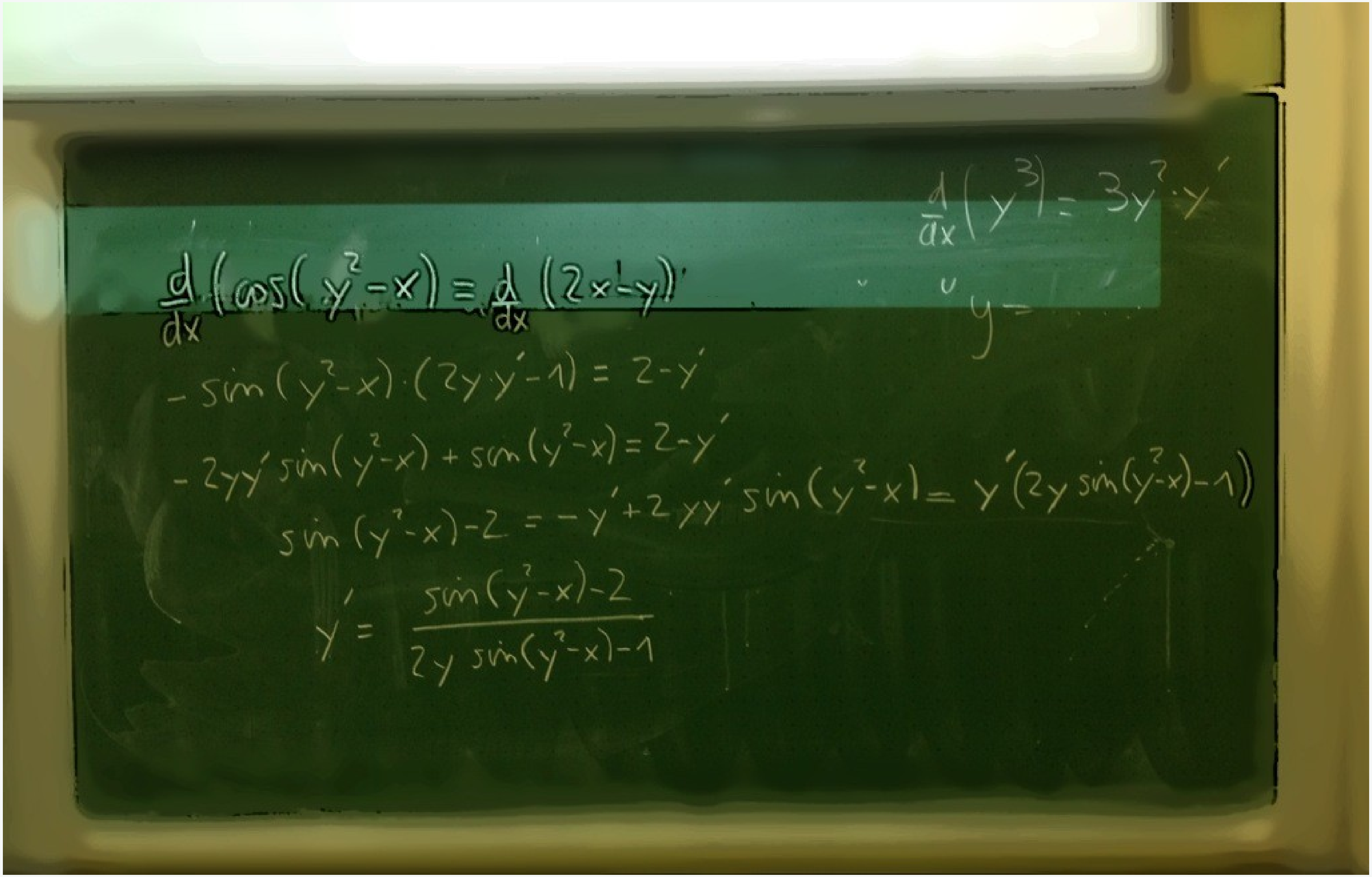
$$\frac{d}{dx}\left(\sin(x^2-y)\right) = \frac{d}{dx}(xy)$$

$$\cos(x^2-y)\cdot(2x-y') = 1\cdot y + xy'$$

$$2x\cdot\cos(x^2-y) - y'\cos(x^2-y) = y + xy'$$

$$2x\cos(x^2-y) - y = xy' + y'\cos(x^2-y) = y'(x+\cos(x^2-y))$$

$$y' = \frac{2x\cos(x^2-y)-y}{x+\cos(x^2-y)}$$


$\frac{d}{dx}\left(\cos(y^2-x)\right) = \frac{d}{dx}(2x-y)$
$-\sin(y^2-x)\cdot(2y\cdot y'-1) = 2-y'$
$-2yy'\sin(y^2-x)+\sin(y^2-x) = 2-y'$
$\sin(y^2-x)-2 = -y'+2yy'\sin(y^2-x) = y'(2y\sin(y^2-x)-1)$
$y' = \frac{\sin(y^2-x)-2}{2y\sin(y^2-x)-1}$
$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\cdot y'$
$y =$

$$d)\quad \cos y - \sin y = x^3\, y, \qquad y' = -\frac{3\,x^2\,y}{x^3 + \sin y + \cos y},$$

$$\cos^2 y = x^2 - y, \qquad y' = \frac{2x}{1 - 2\,\sin y\,\cos y} = \frac{2x}{1 - \sin(2y)},$$

$$\sin^2(2y) = 2x - y - 1, \qquad y' = \frac{2}{4\sin(2y)\cos(2y) + 1} = \frac{2}{2\sin(4y) + 1}.$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie *dy/dx* durch implizites Differenzieren

$$a)\quad x\ln y = 3y - \ln x, \qquad \ln(x+y) = y - x, \qquad \ln y - \ln x = y\,e^{-x},$$

$$b)\quad \ln(x^2+y) = y - 2x, \qquad y = \ln(x^2+y^2), \qquad x - y = \ln\left(\frac{1}{x} - y\right).$$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie *dy/dx* durch implizites Differenzieren

$$a)\quad e^{-y} = y - x, \qquad e^{y} = xy, \qquad e^{x-y} = y - x^2,$$

$$b)\quad e^{y} = \ln x, \qquad e^{x+y} = \ln y, \qquad e^{y-x} = \ln(x+y).$$

$$a)\quad x\ln(y) = 3y - \ln x, \qquad y' = -\frac{y(x\ln y + 1)}{x(x-3y)},$$

$$\ln(x+y) = y - x, \qquad y' = \frac{x+y+1}{x+y-1},$$

$$\ln y - \ln x = y\,e^{-x}, \qquad y' = \frac{y\left(e^x - xy\right)}{x\left(e^x - y\right)},$$

$$b)\quad \ln(x^2+y) = y - 2x, \qquad y' = \frac{2(x^2+x+y)}{x^2+y-1},$$

$$y = \ln(x^2+y^2), \qquad y' = \frac{2x}{x^2+y^2-2y},$$

$$x - y = \ln\left(\frac{1}{x} - y\right), \qquad y' = \frac{x^2y - x - 1}{x\left(xy + x - 1\right)}.$$

a) $e^{-y} = y - x, \quad y' = \dfrac{e^{y}}{e^{y} + 1}, \qquad e^{y} = xy, \quad y' = \dfrac{y}{e^{y} - x},$

$e^{x-y} = y - x^2, \quad y' = \dfrac{2xe^{y} + e^{x}}{e^{x} + e^{y}}$

b) $e^{y} = \ln x, \quad y' = \dfrac{e^{-y}}{x}, \qquad e^{x+y} = \ln y, \quad y' = \dfrac{y\, e^{x+y}}{1 - y\, e^{x+y}},$

$e^{y-x} = \ln(x+y), \quad y' = \dfrac{e^{y}(x+y) + e^{x}}{e^{y}(x+y) - e^{x}},$

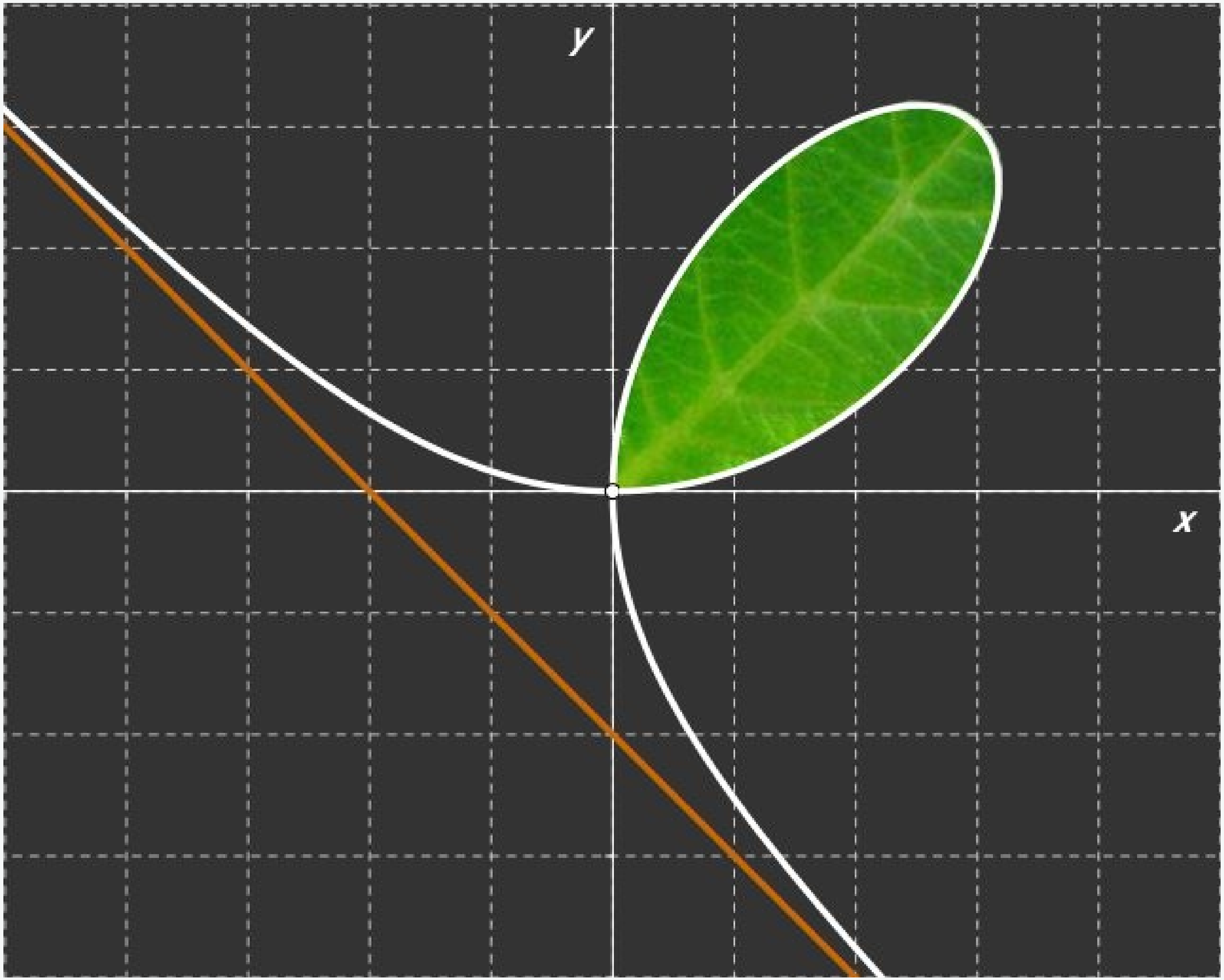


Abb. 3-1: Das kartesische Blatt $x^3 + y^3 = 3axy$

Das kartesische Blatt ist eine ebene Kurve 3. Ordnung, die nach dem französischen Mathematiker und Philosophen René Descartes benannt ist.

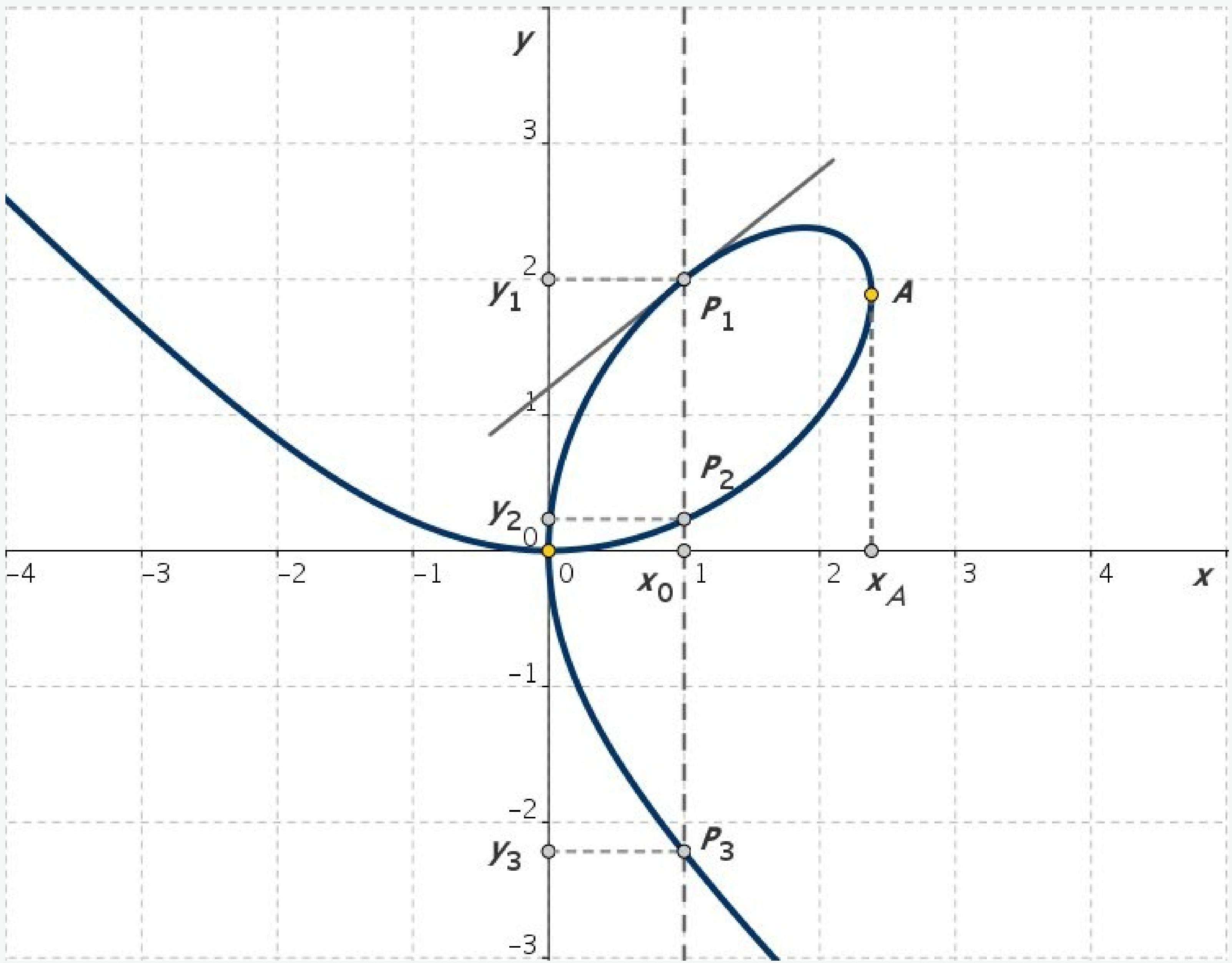


Abb. 3-2: Die Kurve $x^3 + y^3 = 9/2\, xy$ $(a = 3/2)$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die Gleichung einer Tangente der gezeichneten Kurve $x^3 + y^3 = 9/2\, xy$ im Punkt $(1, 2)$.

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + y^3\right) = \frac{9}{2}\,\frac{d}{dx}\left(x\,y\right), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3\,y - 2\,x^2}{2\,y^2 - 3\,x}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \left(\frac{3\,y - 2\,x^2}{2\,y^2 - 3\,x}\right)_{x=1,\ y=2} = \frac{4}{5},$$

$$y_{\tan} = \frac{4}{5}\,x + \frac{6}{5}$$

Die Gleichung einer Kurve C ist gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(1, 0)$.

$$C: \quad y = \ln\left(x^2 + 2\, y^2\right)$$

$C: \quad y = \ln(x^2 + 2y^2)$

Die implizite Differentiation führt zunächst auf

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\ln(x^2 + 2y^2)\right) = \frac{2x + 4yy'}{x^2 + 2y^2}$$

Einsetzen der x- und y-Koordinaten von $P(1, 0)$ ergibt dann direkt $y' = 2$.

$$y'\big|_{x=1,\ y=0} = 2$$

$$m = 2, \qquad y_{\tan} = 2x - 2$$