3.1.1. Erklärungen

Aufgabe 1 Die Funktionen $y = \log_2 x$, $y = \log_4 x$ und $y = \log_8 x$ sind monoton steigend im ganzen Definitionsbereich. Die Funktion $y = \log_2 x$ hat im Bereich $x \in (0, 1)$ im Vergleich zu den beiden anderen Funktionen kleinere Funktionswerte und im Bereich $x \in (1, \infty)$ größere. Dagegen hat die Funktion $y = \log_8 x$ die größten Funktionswerte im Bereich $(0, 1)$ und die kleinsten im Bereich $x \in (1, \infty)$. Alle drei Funktionen haben eine gemeinsame Nullstelle bei $x = 1$ und eine vertikale Asymptote bei $x = 0$.

Aufgabe 2 Mit wachsendem b werden die Funktionswerte von $y = \log_b x$ größer im Bereich $x \in (0, 1)$ und kleiner Bereich $x \in (1, \infty)$. Im angegebenen Bereich von b bleibt die Funktion monoton wachsend, hat eine Nullstelle bei $x = 1$ und eine vertikale Asymptote bei $x = 0$.

Aufgabe 3 Die beiden Funktionen $y = \log_2 x$ und $y = \log_4 x$ sind monoton wachsende Funktionen. Im Bereich $x \in (1, \infty)$ hat $y = \log_2 x$ die größeren Funktionswerte. Das kann man folgendermaßen zeigen: Wir nehmen x als Potenz mit der Basis 4, also $x = 4^n$, $n > 0$. Entsprechende y-Werte lassen sich einfach bestimmen:

$$
\begin{aligned}
&y = \log_4 x = \log_4 (4^n) = n,\\
&y = \log_2 x = \log_2 (4^n) = \log_2 \left(2^2\right)^n = \log_2 2^{2n} = 2n,\\
&2n > n, \qquad \log_2 x > \log_4 x \quad \text{für} \quad x \in (1, \infty).
\end{aligned}
$$

Allgemein kann man sagen: Für beliebige b_1 und b_2 mit $b_2 > b_1 > 1$ gilt für $x \in (1, \infty)$ die Ungleichung $\log_{b_1} x > \log_{b_2} x$.

Aufgabe 4 Die Ungleichung $\log_2 x < \log_8 x$ gilt im Bereich $x \in (0, 1)$. Um das zu beweisen, nehmen wir x als eine negative Potenz von 8, also $x = (1/8)^n = 8^{-n}$, $n > 0$ und bestimmen die Funktionswerte:

$$
\begin{aligned}
&y = \log_8 x = \log_8 (8^{-n}) = -n,\\
&y = \log_2 x = \log_2 (8^{-n}) = \log_2 \left(2^{-3n}\right) = -3n,\\
&-3n < -n, \qquad \log_2 x < \log_8 x \quad \text{für} \quad x \in (0, 1).
\end{aligned}
$$

Allgemein kann man sagen: Für beliebige b_1 und b_2 mit $b_2 > b_1 > 1$ gilt für $x \in (0, 1)$ die Ungleichung $\log_{b_1} x < \log_{b_2} x$.